Programa: Maestría en Economía
Edición: 2021
Curso: Economía política
Docente: Alvaro Forteza

Primer Juego de Ejercicios

1. Suponga que tres votantes (A, B y C) eligen una de tres políticas posibles (1, 2 y 3) en base a la regla pura de la mayoría. El orden de preferencias es: $A:1 \succ 2 \succ 3;\ B:1 \succ 2 \succ 3; C:2 \succ 1 \succ 3$. ¿Existe una política ganadora de Condorcet? Fundamente su respuesta.

2. Muestre que la siguiente función de preferencias de política satisface la propiedad de un solo cruce: $W^i(g) = (y-g)\frac{y^i}{y} + H(g)$. En esta expresión, *y* es el ingreso medio, y^i es el ingreso del individuo *i*, *g* es el gasto público per cápita y *H(g)* es una función creciente y cóncava.

3. Todos los individuos de un país tienen un mismo ingreso (y). El gobierno cobra una tasa de impuestos al ingreso (τ) y provee dos bienes públicos (g_1 y g_2 per cápita). Los individuos también consumen un bien privado "*c*". La población es heterogénea en términos de sus preferencias por los bienes públicos. La utilidad del individuo i es: $u^i = Ln(c) + \alpha^i Ln(g_1) + (1-\alpha^i)Ln(g_2)$.

3.1. ¿Satisfacen estas preferencias la condición de preferencias intermedias?

3.2. Determine el par (g_1,g_2) preferido por el votante i, si $\alpha^i = 1$.

4. Un país está compuesto por dos grupos de ciudadanos. El grupo 1 tiene 1 millón de votantes y el grupo 2 tiene 2 millones de votantes. Hay un gobierno que puede hacer transferencias de un grupo a otro. Sea t_1 la transferencia que *recibe* cada miembro del grupo 1 y t_2 la transferencia que *recibe* cada miembro del grupo 2 (valores negativos de t_1 o de t_2 representan entonces transferencias *desde* los individuos de los grupos 1 y 2, respectivamente). Todos los individuos tienen el mismo ingreso de 10 unidades antes de las transferencias y, por lo tanto, el ingreso después de transferencias es $(10+t_1)$ para los miembros del grupo 1 y $(10+t_2)$ para los miembros del grupo 2. Las preferencias de los individuos por el ingreso disponible se pueden representar por una función de utilidad continua, creciente y cóncava: $u(10+t_i),\ u'>0,\ u''<0,\ i=1,2$. La restricción presupuestal del gobierno resulta: $t_1 + 2t_2 = 0$. El gobierno no puede extraer de un individuo más que los ingresos que el individuo tiene antes de las transferencias, es decir que se debe verificar que: $t_1 \geq -10$ y $t_2 \geq -10$.

4.1. Determine la política preferida por los ciudadanos de cada grupo.

4.2. ¿Se satisface la condición de que las preferencias de políticas tienen "un solo pico"?

Suponga que dos candidatos compiten por las preferencias del electorado ofreciendo transferencias. Su único objetivo es ganar las elecciones. Tienen capacidad de comprometer sus políticas durante la campaña electoral. El candidato A presenta una plataforma electoral $\left(t_1^A, t_2^A\right)$ y el candidato B presenta una plataforma $\left(t_1^B, t_2^B\right)$.

4.3. Determine las plataformas de ambos candidatos en el equilibrio político.

Suponga ahora que los individuos tienen ciertas preferencias partidarias. El índice de utilidad σ representa la preferencia partidaria neta por el candidato B. Teniendo en cuenta las preferencias de políticas y las preferencias partidarias, un votante con preferencia partidaria σ vota por el candidato A si: $u\left(10+t_i^A\right) > u\left(10+t_i^B\right)+\sigma$. Los ciudadanos tienen preferencias partidarias heterogéneas, distribuidas uniformemente en la población con media cero y densidad Σ (la misma en ambos grupos). Los candidatos no conocen la preferencias partidarias individuales cuando eligen su plataforma electoral, pero conocen la distribución de esas preferencias.

4.4. Muestre que el número de votos que obtiene el candidato A (en millones) está dado por la siguiente expresión: $V^A = \frac{3}{2} + \left[u\left(10+t_1^A\right) - u\left(10+t_1^B\right) + 2u\left(10+t_2^A\right) - 2u\left(10+t_2^B\right)\right]\Sigma$

4.5. Determine las plataformas de ambos candidatos en el equilibrio político, suponiendo que su objetivo es maximizar el número de votos.

5. Considere un modelo de elecciones con lobbies ofreciendo contribuciones para el financiamiento de las campañas electorales. Los candidatos comprometen el gasto público (g) durante la campaña. El financiamiento del gasto público se hace con un impuesto proporcional al ingreso, con lo cual la política fiscal resulta redistributiva. El modelo es el mismo que presentan Persson y Tabellini (2000, sección 3.5) y es el presentado en clase (sección 2.4.1), salvo que la función de objetivos del lobby J recoge el supuesto de que el costo de la contribución para el lobista es tanto mayor cuanto menor es su ingreso:

$$P_A W^J\left(g_A\right) + \left(1-P_A\right) W^J\left(g_B\right) - \tfrac{1}{2}\left[\left(C_A^J / y^J\right)^2 + \left(C_B^J / y^J\right)^2\right]$$

Hay tres grupos (pobres, clase media y ricos) igualmente numerosos ($\alpha^J=1/3$, para todo J). Suponiendo que todos los grupos están organizados para hacer contribuciones ($O^J=1$, para todo J), diga si la acción de los lobbies desplaza el equilibrio político hacia más o menos gobierno. Fundamente su respuesta.

6. Un político tiene un conocimiento limitado de una realidad sobre la que tiene que actuar. Sabe que, dependiendo de las circunstancias, su política óptima puede tomar cualquiera de los siguientes tres valores: 2, 8 y 10. En principio, le asigna igual probabilidad a los tres valores, pero puede revisar esas probabilidades si obtiene información adicional relevante. Hay un lobby que conoce el verdadero estado de la naturaleza y, por lo tanto, sabe si en las

circunstancias del momento, la política óptima para el político es 2, 8 o 10. El lobby tiene preferencias de política diferentes al político. Sus políticas preferidas son 0, 6 y 8 en los tres estados de la naturaleza, respectivamente. Es decir que el lobby siempre prefiere 2 puntos menos que el político. La función de utilidad es cuadrática. El político obtiene la utilidad $G(p,\theta) = -(p-\theta)^2$ cuando adopta la política p y el estado de la naturaleza es θ. El lobby obtiene la utilidad $U(p,\theta) = -(p-\theta+2)^2$ en las mismas circunstancias. ¿Está el lobby en condiciones de dar un informe creíble al político? Determine todos los informes creíbles que el lobby puede emitir.

7. Un grupo de interés tiene mejor información que un político sobre un tema en el que el político tiene que tomar una decisión. En principio, el grupo de interés puede informar sobre cuál es el "estado de la naturaleza" y hay tres estados posibles $\theta \in \{1,2,10\}$. Pero sus preferencias difieren de las del político y, por lo tanto, el grupo de interés puede no revelar fielmente el "estado de la naturaleza". El político sólo sabe que la probabilidad de cada estado es 1/3. Suponiendo que la función de utilidad del grupo de interés es $U(p,\theta) = -(p-\theta-2)^2$, identifique todos los equilibrios posibles.

Pauta de respuesta

1. Sí, la política 1 es ganadora de Condorcet. En una primera ronda, enfrentamos 1 a 2 y vence 1 por ser preferida por A y por B. Luego enfrentamos a la ganadora de la primera ronda, es decir a 1, y a 3. Nuevamente 1 vence a 3.

2. La propiedad de un solo cruce se cumple si se verifica la siguiente condición (y su simétrico que no incluyo): si *a* prefiere g' a g", siendo g'>g", entonces todos los "más pobres" que *a* (los *b* tales que $y^b<y^a$) prefieren también g' frente a g". Lo que se pide entonces es demostrar que esta condición (y su simétrica) se verifica en este caso particular. Dada la forma de la función de preferencias de política, se verifica que *a* prefiere g' a g" si se cumple que:

$$W^a(g') - W^a(g'') = (y - g')\frac{y^a}{y} + H(g') - \left[(y - g'')\frac{y^a}{y} + H(g'')\right]$$

$$= (g'' - g')\frac{y^a}{y} + H(g') - H(g'') > 0$$

Se trata de mostrar que la misma desigualdad deberá ser entonces válida para *b,* si $y^b<y^a$.

$$W^b(g') - W^b(g'') = (g'' - g')\frac{y^b}{y} + H(g') - H(g'') > (g'' - g')\frac{y^a}{y} + H(g') - H(g'')$$

dado que $(g''-g')<0$ y $y^b<y^a$. Se concluye entonces que:

$$W^b(g') - W^b(g'') > W^a(g') - W^a(g'') > 0$$

Queda pendiente demostrar el simétrico, es decir que los más ricos que *a* preferirán un gobierno más chico que *a*.

3.1. Primero deduzco la función de preferencias de política de los votantes. Los individuos enfrentan la restricción presupuestal $c \leq (1-\tau)y$. Eligen consumir todo su ingreso disponible: $c = (1-\tau)y$. Saben que el gobierno tiene la siguiente restricción presupuestal: $g_1 + g_2 = \tau y \Rightarrow \tau = (g_1 + g_2)/y$. Por lo tanto, las preferencias de política de "i" son: $u^i(g_1, g_2; \alpha^i) = Ln(y - g_1 - g_2) + \alpha^i Ln(g_1) + (1-\alpha^i)Ln(g_2)$. Reordenando términos: $u^i(g_1, g_2; \alpha^i) = Ln(y - g_1 - g_2) + Ln(g_2) + \alpha^i(Ln(g_1) - Ln(g_2))$. Esto puede escribirse entonces como: $u(.) = J(g_1, g_2) + K(\alpha^i)H(g_1, g_2)$, donde $K(\alpha^i)$ es obviamente monótona.

3.2. Si $\alpha^i = 1$, entonces la función de preferencias de política se reduce a: $u^i(g_1, g_2; \alpha^i) = Ln(y - g_1 - g_2) + Ln(g_1)$. Hay que notar antes que nada que esta función es decreciente en g_2 y, por lo tanto, el óptimo es $g_2 = 0$ (dado que $g_2 \geq 0$). Luego resolvemos para g_1, que sí presenta un óptimo interior: $\frac{\partial u}{\partial g_1}(.) = -\frac{1}{y - g_1} + \frac{1}{g_1} = 0 \;\Rightarrow g_1 = \frac{y}{2}$.

Programa: Maestría en Economía
Edición: 2021
Curso: Economía política
Docente: Alvaro Forteza

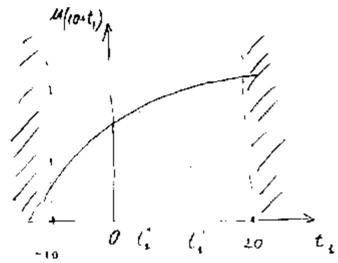
4. (Donde dice 1.1 debe decir 4.1, etc.)

1.1 - Individuos del grupo 1 tienen preferencias $u(10+t_1)$, con $u'(\cdot)>0$ $\Rightarrow$ prefieren t_1 tan grande como sea posible. Teniendo en cuenta la restricción presupuestal del gobierno: $t_1 = -2t_2$ $\Rightarrow$ miembros del grupo 1 prefieren t_2 tan chico como sea posible. Es decir $t_2 = -10$

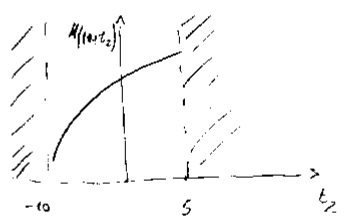
$$\Rightarrow \boxed{t_1^* = 20 \; ; \; t_2(t_1^*) = -10}$$

Miembros del grupo 2 prefieren t_2 tan grande como sea posible y t_1 tan chico como sea posible:

$$\boxed{t_2^* = -\frac{-10}{2} = 5 \; ; \; t_1(t_2^*) = -10}$$



1.2 - Sí, dado que $u(\cdot)$ es monótona. Gráficamente:

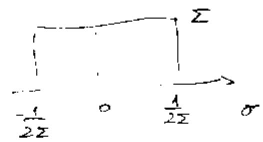


Algebraicamente: se cumple que $t_1^i \le t_1' \le t_1^*$ $\Rightarrow$ $u(10+t_1^i) \le u(10+t_1')$

1.3. Candidatos motivados por el cargo van a favorecer al grupo mayoritario, es decir el grupo 2. Por lo tanto ambos candidatos proponen plataformas: $\boxed{t_1^i = -10, \; t_2^i = 5}$

1.4

Votan por A en i : $\sigma < \sigma_i^* = u(10+t_i^A) - u(10+t_i^B)$



$\Rightarrow$ Proporción vota por A en i $= \Sigma\left(\sigma_i^* + \frac{1}{2\Sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Sigma\sigma_i^*$

$$= \frac{1}{2} + \Sigma\left[u(10+t_i^A) - u(10+t_i^B)\right]$$

Votos por A :

$$V_A = 1\left\{\frac{1}{2} + \Sigma\left[u(10+t_1^A) - u(10+t_1^B)\right]\right\} + 2\left\{\frac{1}{2} + \Sigma\left[u(10+t_2^A) - u(10+t_2^B)\right]\right\} =$$

$$\boxed{V^A = \frac{3}{2} + \Sigma\left[u(10+t_1^A) - u(10+t_1^B) + 2u(10+t_2^A) - 2u(10+t_2^B)\right]}$$

1.5 -

$$\max_{t_1^A, t_2^A} V^A$$

s.a.: $t_1^A + 2t_2^A = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_1^A} = \Sigma u'(10+t_1^A)(-1) + \lambda_A = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_2^A} = \Sigma 2u'(10+t_2^A)(-1) + 2\lambda_A = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u'(10+t_1^A)}{\cancel{2}u'(10+t_2^A)} = \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow t_1^A = t_2^A$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_A} = t_1^A + 2t_2^A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1^A = t_2^A = 0}$$

Candidato B: $\max_{t_1^B, t_2^B} V^B = 3 - V^A$

s.a.: $t_1^B + 2t_2^B = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_1^B} = -\Sigma u'(10+t_1^B)(-1) + \lambda_B = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_2^B} = -\Sigma 2u'(10+t_2^B)(-1) + 2\lambda_B = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u'(10+t_1^B)}{\cancel{2}u'(10+t_2^B)} = \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow t_1^B = t_2^B$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_B} = t_1^B + 2t_2^B = 0$$

$$\boxed{t_1^B = t_2^B = 0}$$

5. Resuelvo el modelo con la función de utilidad del lobby modificada. La proporción de votos por A sigue siendo: $\pi_A = \frac{1}{2} + \phi \sum_J \alpha^J \sigma^J$. La probabilidad de que gane A responde a la misma expresión del modelo visto en clase y presentado por Persson y Tabellini. Lo que se modifica ligeramente es el programa que resuelven los lobistas:

$$\underset{C_A^J, C_B^J}{Maximizar} \quad P_A W^J(g_A) + (1 - P_A) W^J(g_B) - \tfrac{1}{2}\left[\left(C_A^J / y^J\right)^2 + \left(C_B^J / y^J\right)^2\right]$$

sujeto a :

$$P_A = \frac{1}{2} + \psi\left[\sum_J \alpha^J \left(W^J(g_A) - W^J(g_B)\right) + h(C_A - C_B)\right]$$

$$C_A = \sum_J O^J \alpha^J C_A^J \ , \quad C_B = \sum_J O^J \alpha^J C_B^J$$

$$C_A^J \geq 0, \quad C_B^J \geq 0$$

Resulta entonces que las contribuciones son:

$$C_A^J = Max\left[0, \psi h \alpha^J \left(W^J(g_A) - W^J(g_B)\right)\left(y^J\right)^2\right]$$

Los políticos eligen entonces el gasto que resuelve:

$$\underset{g_A}{Maximizar} \quad P_A = \sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J\right)^2\right] W^J(g_A) + cte$$

Es decir que maximizan una función de bienestar social a la Bentham donde las ponderaciones de los grupos organizados son mayores cuanto mayor es su ingreso per cápita. En el óptimo se verifica:

$$\frac{\partial p_A}{\partial g_A} = \sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J\right)^2\right] \frac{\partial W^J(g_A^L)}{\partial g_A}$$

$$= \sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J\right)^2\right]\left(-\frac{y^J}{y} + H_g\left(g_A^L\right)\right) = 0$$

Los dos partidos hacen lo mismo en equilibrio: $g^L = g_A^L = g_B^L$. Puede entonces escribirse que el gasto en el equilibrio con lobbies será: $g^L = H_g^{-1}\left(\hat{y}/y\right)$, donde:

$\hat{y} = \dfrac{\sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J\right)^2\right] y^J}{\sum_J \alpha^J \left[\psi + O^J (\psi h)^2 \alpha^J \left(y^J\right)^2\right]} = \dfrac{\sum_J \left[\psi + (\psi h)^2 (1/3) \left(y^J\right)^2\right] y^J}{\sum_J \left[\psi + (\psi h)^2 (1/3) \left(y^J\right)^2\right]} > y$, dado que el lado izquierdo es un promedio ponderado de los ingresos donde reciben mayor ponderación los ingresos mayores. Se concluye entonces que: $g_A^L < g*$, siendo $g*$ el gasto correspondiente al "óptimo social" (sin lobbies). Este resultado de un menor gasto público en equilibrio es consistente con la observación hecha más arriba de que los grupos con mayor ingreso per cápita se benefician. En este modelo, el gobierno pondera más a los ricos al elegir el monto del gasto y los ricos prefieren un gobierno más chico.

6. Evalúo primero si existe un equilibrio con revelación plena de los estados de la naturaleza, es decir una situación en la que el lobby informa específicamente si θ es igual a 2, 8 o 10. Voy a llegar a la conclusión de que no hay un equilibrio con plena revelación en este ejemplo. Paso entonces a evaluar un equilibrio con revelación parcial. Muestro que existe un equilibrio en que el lobby informa que el estado de la naturaleza es “2” o “no 2”.

a) Analizo posibilidad de equilibrio de revelación plena:
a.1) Si $\theta = 2$, el lobby no miente ya que su sesgo es negativo. Si el lobista informa 2, el político implementa *p=2*. El lobista preferiría *p=0*, pero le iría aún peor si informara 8 o 10 y el político le creyera, es decir si el político implementara *p=8* o *p=10*. Es la situación simétrica a la que vimos en clase (o en el capítulo 4 de Grossman y Helpman) con θ_H.
a.2) Si $\theta = 8$, el lobby podría estar tentado de subdeclarar. Si informa verazmente y el político le cree, entonces *p = 8*. Si en cambio miente, declara 2 y el político le cree, entonces *p=2*. La política óptima para el lobby en este estado de la naturaleza es 6, lo cual está más cerca de 8, es decir del verdadero valor de theta, que de 2. Por lo tanto, el lobby declara la verdad en este caso.
a.3) Si $\theta = 10$, el lobby puede estar tentado a subdeclarar. Si informa verazmente y el político le cree, entonces *p=10*. Si miente, declara 8 y el político le cree, entonces *p=8*. La política óptima para el lobby cuando $\theta = 10$ es 8. Por lo tanto, en este estado de la naturaleza el lobby miente. Este informe no es creíble ya que el político sabe que el lobby tiene el incentivo a mentir en este caso. Descartamos entonces el equilibrio de revelación plena.

b) Analizo equilibrio de revelación parcial. ¿Puede el lobby informar “2” o “no 2”?
b.1) Si $\theta = 2$, el lobby no tiene razón para mentir.
b.2) Si $\theta = 8$, podría haber en principio una tentación a subdeclarar. Si informa la verdad, lo cual en este caso significa que emite al mensaje “θ no es 2” y el político le cree, entonces la mejor predicción de theta que puede hacer el político es $E\left[(8+10)/2 \middle| \theta \neq 2\right] = 9$ y, por lo tanto, *p=9*. Si, en cambio, el lobby informa que theta es 2 y el político le cree, entonces *p=2*. ¿Miente el lobby en estas circunstancias? No, ya que su política óptima ahora es 6 (=8-2) y esto está más cerca de 9 que de 2.

b.3) Si $\theta = 10$, hay una tentación a declarar menos. Si informa la verdad, es decir que theta no es 2, entonces *p=9*. Si miente y declara que theta es 2, entonces *p=2*. El lobista no miente en este caso, ya que su política preferida es 8(=10-2) y esto está más cerca de 9 que de 2.
Se concluye entonces que en este ejemplo el lobista puede informar en forma creíble que el estado de la naturaleza es "2" o "no 2".

7. Un grupo de interés tiene mejor información que un político sobre un tema en el que el político tiene que tomar una decisión. En principio, el grupo de interés puede informar sobre cuál es el "estado de la naturaleza" y hay tres estados posibles $\theta \in \{1,2,10\}$. Pero sus preferencias difieren de las del político y, por lo tanto, el grupo de interés puede no revelar fielmente el "estado de la naturaleza". El político sólo sabe que la probabilidad de cada estado es 1/3. Suponiendo que la función de utilidad del grupo de interés es $U(p,\theta) = -(p-\theta-2)^2$, identifique todos los equilibrios posibles.

El lobby tiene un sesgo positivo $\delta = 2$. Por lo tanto, sabemos que el lobby no va a mentir si observa $\theta = 10$. Para que no mienta cuando $\theta = 2$ diciendo que $\theta = 10$, debe cumplirse que $\delta \leq (10-2)/2 = 4$. Esto se cumple, ya que $\delta = 2 < 4$. Tampoco tiene incentivos a decir que $\theta = 1$ cuando $\theta = 2$. Finalmente, para que no mienta cuando $\theta = 1$ diciendo que $\theta = 2$, debe cumplirse que $\delta \leq (2-1)/2 = 0,5$ y esto no se cumple. Por lo tanto, **no** hay un equilibrio de revelación plena.

Considero un equilibrio de revelación parcial en que el lobby informa "bajo" si $\theta \in \{1,2\}$ y "alto" si $\theta = 10$. Si observa 10, no tiene incentivos a mentir subdeclarando. Si observa $\theta = 2$, puede declarar "bajo", con lo cual la política será $p = \frac{1+2}{2} = 1,5$, o puede declarar $\theta = 10$, con lo cual la política será $p = 10$. Su punto preferido cuando observa $\theta = 2$ es $\theta + \delta = 4$. El lobista no miente en este caso ya que la política $p = 10$ está más lejos de su punto óptimo que la política $p = 1,5$, es decir: $10 - 4 \geq 4 - 1,5$. Si observa $\theta = 1$, su punto preferido es $\theta + \delta = 3$. Tampoco miente en este caso ya que $10 - 3 \geq 3 - 1,5$. Hay entonces un equilibrio de revelación parcial en que el lobista declara "bajo" cuando observa $\theta \in \{1,2\}$ y "alto" cuando observa $\theta = 10$.

Considero un equilibrio de revelación parcial en que el lobby informa "bajo" si $\theta = 1$ y "alto" si $\theta \in \{2,10\}$. Si observa 10, no tiene incentivos a mentir subdeclarando. Si observa $\theta = 2$, puede declarar "alto", con lo cual la política será $p = \frac{2+10}{2} = 6$, o puede declarar $\theta = 1$, con lo cual la política será $p = 1$. Su punto preferido cuando observa $\theta = 2$ es $\theta + \delta = 4$. El lobista no miente en este caso ya que la política $p = 6$ está más cerca de su punto óptimo que la política $p = 1$, es decir: $6 - 4 < 4 - 1$. Si observa $\theta = 1$, su punto preferido es $\theta + \delta = 3$. Tampoco miente en este caso ya que $6 - 3 > 3 - 1$. Hay entonces un equilibrio de revelación parcial en que el lobista declara "bajo" si $\theta = 1$ y "alto" si $\theta \in \{2,10\}$.

Por último, existe un equilibrio no informativo. Si el político no cree en los anuncios, el lobista no tiene incentivos a informar verazmente.