Programa: Maestría en Economía
Edición: 2021
Curso: Economía Política
Docente: Alvaro Forteza

dECON
Facultad de Ciencias Sociales
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Sexto Juego de Ejercicios

1. Considere el modelo de rentas derivadas del poder de la titularidad que presentan Persson y Tabellini (2000) en la sección 4.4.1. Según este modelo, el "poder de la titularidad" (entendido como el poder que tiene el gobernante como consecuencia de tener asegurado un cierto tiempo en el ejercicio del poder antes de que pueda llegar a ser sustituido) le permite al gobernante extraer rentas, debilitando así el poder disciplinador de las elecciones. Sin embargo, los autores concluyen que un gobernante con poder de titularidad seguiría proveyendo el bien público en forma óptima. Una conclusión fundamental del modelo es entonces que el poder de la titularidad puede explicar la extracción de rentas, pero no la provisión subóptima de bienes públicos. En el marco de este modelo, demuestre que es efectivamente óptimo para el gobernante que aspira a ser reelecto proveer la cantidad socialmente óptima del bien público.

2. Considere el modelo de "competencia electoral ineficiente" (Persson y Tabellini, 2000, sección 4.2).
2.1. Muestre que la incertidumbre respecto al valor del sesgo ideológico medio de los votantes beneficia a los políticos.
2.2. ¿Es posible que los políticos **no** puedan extraer rentas en equilibrio aún cuando sean inciertas las preferencias políticas de los ciudadanos? Fundamente su respuesta.

3. Considere una versión simplificada del modelo de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3),[1] en la que las rentas son determinísticas y los parámetros adoptan los siguientes valores:
$E = 1\,;\ r_1 = 2\,;\ r_2 = 5\,;\ \Delta = 1\,;\ \beta = 0{,}5\,;\ \pi = 0{,}5$
3.1. ¿Cabe esperar que ambos tipos de políticos apliquen las mismas o diferentes políticas en el **segundo** período? Determine esas políticas.
3.2. ¿Cabe esperar que ambos tipos de políticos apliquen las mismas o diferentes políticas en el **primer** período? Determine esas políticas.
3.3. ¿Aprende la ciudadanía en el equilibrio político? ¿Cuáles son las probabilidades que los ciudadanos asignan a que el político en el gobierno sea "congruente" a lo largo del juego?
3.4. Calcule la utilidad esperada de los votantes con la información disponible al inicio del juego.

4. Considere una versión simplificada del modelo de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3), en la que las rentas son determinísticas y los parámetros adoptan los siguientes valores:
$E = 1\,;\ r_1 = 4\,;\ r_2 = 5\,;\ \Delta = 1\,;\ \beta = 0{,}5\,;\ \pi = 0{,}5$
4.1. ¿Cabe esperar que ambos tipos de políticos apliquen las mismas o diferentes políticas en el **primer** período? Determine esas políticas.
4.2. ¿Aprende la ciudadanía en el equilibrio político? ¿Cuáles son las probabilidades que los ciudadanos asignan a que el político en el gobierno sea "congruente" a lo largo del juego?

---

[1] Besley (2005): ¿Principled Agents? The Political Economy of Good Government. Oxford University Press.

4.3. ¿Cumplen las elecciones el papel de "disciplinar" a los políticos en el equilibrio que encontró? Explique.
4.4. ¿Cumplen las elecciones el papel de seleccionar buenos políticos en el equilibrio que encontró? Explique.

5. Considere el modelo básico de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3). Los parámetros adoptan los siguientes valores:
$E = 1$; $\Delta = 1$; $\beta = 0{,}5$; $\pi = 0{,}5$
Las rentas que puede extraer el político son aleatorias. Pueden adoptar tres valores, 1, 5 y 9, con igual probabilidad (es decir con probabilidad 1/3).
5.1. ¿Cabe esperar que ambos tipos de políticos apliquen las mismas o diferentes políticas en el **segundo** período? Determine esas políticas.
5.2. Muestre que en este ejemplo habrá un equilibrio semi-separador en que los políticos "congruentes" siempre eligen $e_1 = s_1$ y los "disonantes" lo hacen con probabilidad $\lambda > 0$. Determine el valor de λ.
5.3. ¿Aprende la ciudadanía en el equilibrio político? ¿Cuáles son las probabilidades que los ciudadanos asignan a que el político en el gobierno sea "congruente" a lo largo del juego?
5.4. ¿Cumplen las elecciones el papel de "disciplinar" a los políticos en este equilibrio? Explique.

6.1. Considere el modelo de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3).[2] Los parámetros adoptan los siguientes valores:
$E = 10$; $\Delta = 1$; $\beta = 0{,}5$; $\pi = 0{,}5$
Las rentas que puede extraer el político son aleatorias: con probabilidad 0,6 el político tiene la posibilidad de extraer rentas iguales a 1 y con probabilidad 0,4 tiene la posibilidad de extraer rentas iguales a 5. Dados estos parámetros, existe un equilibrio agrupador en el que los políticos disonantes imitan a los congruentes en el primer período.
Notar: No se le pide que determine los equilibrios. Le estoy informando que, con estos valores de los parámetros, existe sólo un equilibrio y es agrupador.
6.1. Determine la probabilidad de que el político disonante elija $e_1 = s_1$.
6.2. Determine la utilidad esperada de los ciudadanos.
6.3. ¿Cómo influye la proporción de políticos congruentes en la utilidad esperada de los ciudadanos? Fundamente su respuesta.

7. Considere el modelo básico de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3). Los parámetros adoptan los siguientes valores:
$E = 10$; $\Delta = 1$; $\beta = 0{,}5$; $\pi = 0{,}5$
Las rentas que puede extraer el político son aleatorias: con probabilidad 0,6 el político tiene la posibilidad de extraer rentas iguales a 1 y con probabilidad 0,4 tiene la posibilidad de extraer rentas iguales a 5. Identifique el equilibrio.
7.1. Diga si habrá un equilibrio separador, agrupador o semi-separador. Fundamente su respuesta.

[2] Besley (2005): ¿Principled Agents? The Political Economy of Good Government. Oxford University Press.

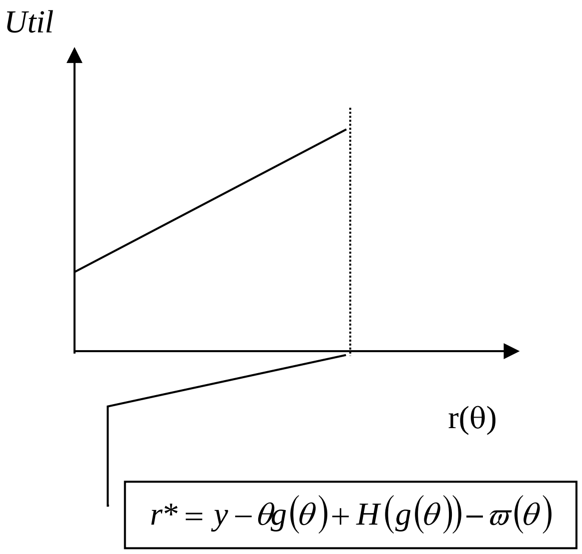
7.2. En el equilibrio que identificó, diga cuál es la probabilidad de que un político "disonante" elija $e_1 = s_1$. Explique.
7.3. ¿Cumplen las elecciones el papel de "disciplinar" a los políticos "disonantes" en el equilibrio que identificó? Explique.

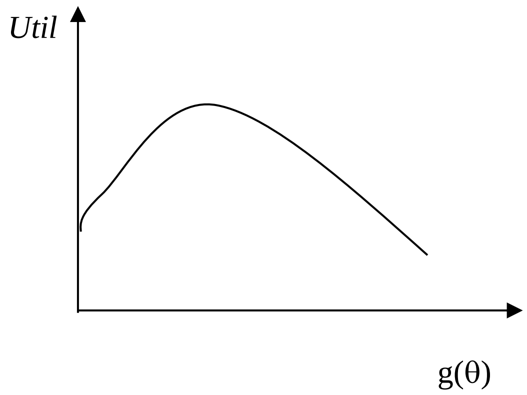
Pautas de respuesta

1. Los electores fijan su utilidad de reserva para reelegir al gobernante de tal manera de asegurar que el gobernante aspire a la reelección y lo hacen de la manera menos costosa posible para ellos. Si exigieran una utilidad de reserva excesivamente elevada, el gobernante desistiría de la reelección y adoptaría una actitud predadora: máximas rentas y mínima provisión del bien público. En consecuencia, los votantes deberían "apretar", pero no excesivamente. Su objetivo es poner al gobernante en la posición de apostar a la reelección, en cuyo caso el gobernante resuelve el siguiente programa:

$$\underset{g(\theta),r(\theta)}{Max}\ \gamma r(\theta)+R$$
$$sujeto\ a: W(g(\theta),r(\theta)) = y-(\theta g(\theta)+r(\theta))+H(g(\theta)) \geq \varpi(\theta)$$

Este problema presenta una solución interior (en condiciones "normales") en la dimensión del gasto público y de esquina en la dimensión renta:





En consecuencia, el gobierno elige el gasto óptimo igualando a cero la derivada del Lagrangeano. La condición de primer orden resulta ser: $-\theta+H'(g^*(\theta))=0$ y, por lo tanto, el gasto elegido es socialmente óptimo. Se provee el bien público hasta el punto en que la utilidad marginal iguala al costo marginal.

2.1. La incertidumbre respecto al sesgo ideológico medio se mide en este modelo con el parámetro ψ. Cuanto mayor es este parámetro, menor es la incertidumbre. Las rentas que los políticos extraen en equilibrio son una función decreciente de ψ y, por lo tanto, son una función creciente de la incertidumbre respecto al sesgo ideológico medio.

2.2. Sí, para eso basta con que $\psi \geq \gamma/2R$. Es decir que si la incertidumbre es reducida, la competencia política es suficientemente eficiente como para impedir la extracción de rentas en equilibrio.

3.1 En el segundo período los dos tipos de políticos eligen políticas diferentes. El político "congruente" elige informar el verdadero estado de la naturaleza: $e_2 = s_2$, ya que:

$$u_2^c = \begin{cases} E + \Delta = 2 & si \;\; e_2 = s_2 \\ E + 0 = 1 & si \;\; e_2 \neq s_2 \end{cases}$$

El político "disonante" no va a informar el verdadero estado de la naturaleza, es decir que elige $e_2 \neq s_2$, ya que:

$$u_2^d = \begin{cases} E + 0 = 1 & si \;\; e_2 = s_2 \\ E + r_2 = 6 & si \;\; e_2 \neq s_2 \end{cases}$$

3.2. Si ambos tipos de políticos aplican las mismas políticas, estamos en presencia de un equilibrio agrupador. Si aplican políticas diferentes, estamos en un equilibrio separador. Sabemos que para el político "congruente", el "engaño" (es decir, elegir $e_1 \neq s_1$) es una política dominada. Por lo tanto, nunca elegiría $e_1 \neq s_1$ y no puede existir un equilibrio agrupador en torno a esa política. Para determinar si hay un equilibrio agrupador en torno a la política $e_1 = s_1$, verificamos si las rentas del primer período son suficientemente pequeñas como para que el político "disonante" esté dispuesto a perderlas, haciéndose pasar por "congruente", con el fin de ser reelecto. La condición que debe cumplirse para que exista un equilibrio agrupador es que:

$$\beta(r_2 + E) \geq r_1$$

Esta condición nos dice que la utilidad esperada para el político "disonante" cuando no engaña en el período 1 y es reelecto, es al menos tan grande como la utilidad que obtendría si engañara y extrajera rentas en ese primer período.

En este caso, esa condición se cumple:

$$\beta(r_2 + E) = 0{,}5(5 + 1) = 3 \geq 2 = r_1$$

Por lo tanto, ambos tipos de políticos eligen $e_1 = s_1$. Hay un equilibrio agrupador en torno a $e_1 = s_1$.

¿Existe un equilibrio separador en este juego? En principio, hay dos tipos posibles de equilibrios separadores: (i) "Congruente" elige "engañar" y "disonante" elige "decir la verdad"; (ii) "congruente" elige "decir la verdad" y "disonante" elige "engañar". Es inmediato que no puede haber un equilibrio como (i) en este juego, ya que el político "congruente" nunca encuentra óptimo engañar. Analizamos entonces si puede existir un equilibrio como el (ii).

a) Actualización Bayesiana

En un equilibrio separador en que el político "congruente" elige $e_1 = s_1$ y el "disonante" elige $e_1 \neq s_1$, los votantes saben que:

$$P(e = s|C) = 1 \;\; ; \quad P(e = s|D) = 0$$

Por lo tanto, si observan $e_1 = s_1$ deducen que el político es "congruente" y si observan $e_1 \neq s_1$ deducen que es "disonante". Formalmente:

$$P(C|e = s) = \frac{P(C) \times 1}{P(C) \times 1 + P(D) \times 0} = 1$$

$$P(C|e \neq s) = \frac{P(C) \times 0}{P(C) \times 0 + P(D) \times 1} = 0$$

b) Estrategias óptimas

b.1) Votantes. Es inmediato que los votantes reeligen si $e_1 = s_1$ y votan por el oponente si $e_1 \neq s_1$. Lo verificamos comparando las utilidades esperadas del votante en el segundo período en uno y otro caso.
Si el gobernante "dice la verdad" (es decir, elige $e_1 = s_1$):
$E[V_2|reelige,\ e_1 = s_1] = P(C|\ e_1 = s_1)\beta\Delta = 1 \times 0{,}5 \times 1 = 0{,}5$
$E[V_2|no\,reelige,\ e_1 = s_1] = \pi\beta\Delta = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 1 = 0{,}25$
➔
$E[V_2|reelige,\ e_1 = s_1] = 0{,}5 > 0{,}25 = E[V_2|no\,reelige,\ e_1 = s_1]$
➔ Votantes reeligen al gobernante si observan $e_1 = s_1$.
Si el gobernante "engaña" (es decir, elige $e_1 \neq s_1$):
$E[V_2|reelige,\ e_1 \neq s_1] = P(C|\ e_1 \neq s_1)\beta\Delta = 0$
Notar: usamos la actualización bayesiana. Una vez que observan que hubo engaño, los votantes saben que el político es disonante.
$E[V_2|no\,reelige,\ e_1 \neq s_1] = \pi\beta\Delta = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 1 = 0{,}25$
Notar: Si votantes votan por el oponente, la probabilidad de que el nuevo gobernante sea "congruente" es π. Los votantes no tienen señales del oponente ➔ No hay actualización bayesiana = No hay aprendizaje.
➔
$E[V_2|reelige,\ e_1 \neq s_1] = 0 < 0{,}25 = E[V_2|no\,reelige,\ e_1 \neq s_1]$
➔ Votantes no reeligen al gobernante si observan $e_1 \neq s_1$.
Conclusión: votantes reeligen si observan $e_1 = s_1$ y no reeligen si observan $e_1 \neq s_1$.
Va a ser útil más adelante escribir este resultado así:
$Probabilidad[reelección|\ e_1 = s_1] = 1$
$Probabilidad[reelección|\ e_1 \neq s_1] = 0$

b.2) Políticos.
b.2.1) Políticos congruentes. Como ya vimos, para estos políticos, el engaño es una estrategia dominada. Por lo tanto, siempre eligen decir la verdad: $e_1 = s_1$. Esto es coherente con las estrategias que estamos investigando en este equilibrio separador.
b.2.2) Políticos disonantes. Comparamos su utilidad cuando dicen la verdad y cuando engañan. Si dicen la verdad, obtienen:
$u_1^d + Prob(ree|e_1 = s_1) \times \beta u_2^d = 0 + \beta(r_2 + E)\,,\quad si\ e_1 = s_1$
Notar: Estamos analizando un equilibrio separador en el que los votantes reeligen si observan que en el primer período el político elige decir la verdad. Siendo así, un político disonante tiene certeza de que será reelecto si elige decir la verdad.
Si el político disonante decide engañar obtiene:
$u_1^d + Prob(ree|e_1 \neq s_1) \times \beta u_2^d = r_1 + 0 \times \beta(r_2 + E) = r_1\,,\quad si\ e_1 \neq s_1$
Notar: en este equilibrio, el votante no reelige al gobernante si observa que hubo engaño. Por lo tanto, si el político "disonante" decide engañar en el primer período, toda su utilidad está dada por las rentas que extrae en el primer período.
Para que el equilibrio separador que estamos analizando exista, el político disonante debe encontrar óptimo engañar, es decir que debería cumplirse que:

$$r_1 > \beta(r_2 + E)$$

Y esta condición **no** se verifica en este ejemplo, ya que:

$$r_1 = 2 < 3 = 0{,}5 \times (5 + 1) = \beta(r_2 + E)$$

Por lo tanto, no hay un equilibrio separador en este caso.

3.3. ¿Hay aprendizaje a lo largo del juego?

No. Como el único equilibrio que identificamos es agrupador, los votantes no aprenden nada al observar las acciones del gobernante. Antes de observar las acciones del gobierno en el período 1, la probabilidad que los votantes asignan a que el gobernante sea "congruente" es π. Pero también es igual a π la probabilidad que asignan a que el gobernante sea congruente después de observar que elige $e_1 = s_1$, ya que ambos tipos de políticos hacen lo mismo en este tipo de equilibrio.

3.4. Calcule la utilidad esperada de los votantes con la información disponible al inicio del juego.

El único equilibrio de este juego es agrupador con $e_1 = s_1$. Por lo tanto, en el primer período, los votantes saben que obtendrán Δ:

$V_1 = \Delta$

Hay reelección en el equilibrio agrupador. Por lo tanto, para evaluar la utilidad esperada para los votantes en el segundo período, nos interesa conocer la probabilidad de que el gobernante sea congruente. La probabilidad que el votante asigna a que el gobernante sea congruente es π. La utilidad esperada para el segundo período es entonces:

$V_2 = \pi\Delta$

Por lo tanto, la utilidad esperada para los votantes al inicio del juego es:

$V_1 + \beta V_2 = \Delta + \beta\pi\Delta$

Notar: la utilidad esperada de los votantes es una función creciente en la honestidad media de los políticos, medida por π.

4.1. Resolvemos por inducción hacia atrás. En el segundo período los dos tipos de políticos eligen políticas diferentes. El político "congruente" elige informar el verdadero estado de la naturaleza: $e_2 = s_2$, ya que:

$$u_2^c = \begin{cases} E + \Delta = 2 & si \;\; e_2 = s_2 \\ E + 0 = 1 & si \;\; e_2 \neq s_2 \end{cases}$$

El político "disonante" no va a informar el verdadero estado de la naturaleza, es decir que elige $e_2 \neq s_2$, ya que:

$$u_2^d = \begin{cases} E + 0 = 1 & si \;\; e_2 = s_2 \\ E + r_2 = 6 & si \;\; e_2 \neq s_2 \end{cases}$$

En el primer período podrían ocurrir dos cosas: (i) ambos tipos de políticos aplican las mismas políticas (equilibrio agrupador), (ii) cada tipo elige una política diferente. Hay cuatro posibilidades lógicas, pero dos de ellas se descartan fácilmente. Las cuatro posibilidades son:

1. Equilibrio agrupador en el que ambos tipos de políticos eligen $e_1 = s_1$
2. Equilibrio agrupador en el que ambos tipos de políticos eligen $e_1 \neq s_1$

3. Equilibrio separador en el que "congruente" elige $e_1 = s_1$ y "disonante" elige $e_1 \neq s_1$
4. Equilibrio separador en el que "congruente" elige $e_1 \neq s_1$ y "disonante" elige $e_1 = s_1$
Es inmediato que no puede haber equilibrios como el 2 y el 4, ya que un político "congruente" jamás jugaría $e_1 \neq s_1$. Por lo tanto, nos queda por ver si tenemos equilibrios como el 1 o como el 3.
Sabemos que para que exista un equilibrio agrupador en el que el político "disonante" elige $e_1 = s_1$ debe cumplirse que:
$\beta(r_2 + E) \geq r_1$
En este caso, esa condición **no** se cumple:
$\beta(r_2 + E) = 0{,}5(5 + 1) = 3 < 4 = r_1$
Por lo tanto, no hay un equilibrio agrupador. Las rentas del primer período son demasiado grandes como para que un político "disonante" esté dispuesto a perderlas para apostar a la reelección.
Nos queda sólo por ver si hay un equilibrio separador en el que un político "congruente" elige $e_1 = s_1$ y uno "disonante" elige $e_1 \neq s_1$. Verificamos tres cosas: (a) votantes actualizan la información después de observar la acción de los políticos en el primer período; (b) votantes deciden su voto maximizando su utilidad esperada en el segundo período; (c) políticos toman la acción que maximiza su utilidad esperada.
(a) Actualización bayesiana: Estamos evaluando si existe un equilibrio en el que los políticos "congruentes" siempre eligen $e_1 = s_1$ y los políticos disonantes siempre eligen $e_1 \neq s_1$. Es decir que estamos considerando un posible equilibrio en el que

$$P(e = s|C) = 1 \;;\quad P(e \neq s|D) = 1$$

Las elecciones tienen lugar después de que los votantes han observado el desempeño del gobernante. Saben si jugó $e = s$ o $e \neq s$. En un equilibrio como el que estamos evaluando, el conocimiento de la jugada de los políticos en el primer período les permite a los votantes deducir si el gobernante es "congruente" o "disonante", ya que los votantes saben que un político "congruente" elige $e = s$ y un político "disonante" elige $e \neq s$, ambos con probabilidad 1. Más formalmente, los votantes calculan la probabilidad de que el gobernante sea congruente dada su acción en el primer período:

$$P(C|e = s) = \frac{P(C) \times P(e = s|C)}{P(C) \times P(e = s|C) + P(D) \times P(e = s|D)} = \frac{P(C) \times 1}{P(C) \times 1 + P(D) \times 0} = 1$$

$$P(C|e \neq s) = \frac{P(C) \times P(e \neq s|C)}{P(C) \times P(e \neq s|C) + P(D) \times P(e \neq s|D)} = \frac{P(C) \times 0}{P(C) \times 0 + P(D) \times 1} = 0$$

(b) Votantes. Los votantes saben que, si reeligen al político que está en el gobierno, en el segundo período obtienen Δ si el político es "congruente" y 0 si es "disonante". Si no lo reeligen, entra al gobierno un político de la oposición, cuyo tipo no conocen, pero saben que hay una probabilidad $\pi = 0{,}5$ de que sea "congruente". Por lo tanto, la utilidad esperada de los votantes en el segundo período es:
(i) Si observa $e_1 = s_1$:
$E[V_2|reelige,\ e_1 = s_1] = P(C|\ e_1 = s_1)\beta\Delta$
$E[V_2|no\ reelige,\ e_1 = s_1] = \pi\beta\Delta$
(ii) Si observa $e_1 \neq s_1$:
$E[V_2|reelige,\ e_1 \neq s_1] = P(C|\ e_1 \neq s_1)\beta\Delta$
$E[V_2|no\ reelige,\ e_1 \neq s_1] = \pi\beta\Delta$
Les interesa entonces extraer toda la información que sea posible de las acciones que tomó el gobierno en el primer período para tratar de inferir de qué tipo es el gobernante, es decir para determinar $P(C|\ e_1 = s_1)$ y $P(C|\ e_1 \neq s_1)$. Por lo que vimos en el punto

anterior, en un equilibrio separador como el que estamos considerando los votantes pueden deducir el tipo del político una vez que observaron su jugada. Si el político eligió $e_1 \neq s_1$, los votantes saben que es "disonante". Si el político eligió $e_1 = s_1$, los votantes saben que es "congruente". Es decir que, en este equilibrio, $P(C|\ e_1 = s_1) = 1$ y $P(C|\ e_1 \neq s_1) = 0$. Usando este resultado, los votantes concluyen que les conviene reelegir al político que está en el gobierno para un segundo mandato si observan $e_1 = s_1$, ya que:

$$E[V_2|reelige,\ e_1 = s_1] = P(C|\ e_1 = s_1)\beta\Delta = 1 \times 0{,}5 \times 1 > 0{,}5 \times 0{,}5 \times 1 = \pi\beta\Delta$$
$$= E[V_2|no\ reelige,\ e_1 = s_1]$$

Y concluyen que no les conviene reelegir al político si observan que $e_1 \neq s_1$, ya que:

$$E[V_2|reelige,\ e_1 \neq s_1] = P(C|\ e_1 \neq s_1)\beta\Delta = 0 < 0{,}5 \times 0{,}5 \times 1 = \pi\beta\Delta$$
$$= E[V_2|no\ reelige,\ e_1 \neq s_1]$$

(c) El político que está en el gobierno en el primer período elige la acción que maximiza su utilidad esperada. Si es "congruente", le conviene elegir $e_1 = s_1$. Con esa jugada, obtiene una utilidad $\Delta + \beta\Delta$ y, en cambio, si jugara $e_1 \neq s_1$obtendría 0. Si el político que está en el gobierno en el primer período es "disonante", tendrá las siguientes utilidades esperadas:

$$u_1^d + Prob(ree|e_1 = s_1) \times \beta u_2^d = 0 + \beta(r_2 + E)\,,\quad si\ e_1 = s_1$$
$$u_1^d + Prob(ree|e_1 \neq s_1) \times \beta u_2^d = r_1 + 0 \times \beta(r_2 + E) = r_1\,,\quad si\ e_1 \neq s_1$$

Ya que $Prob(ree|e_1 = s_1) = 1$ y $Prob(ree|e_1 \neq s_1) = 0$ (el político en el gobierno sabe que los votantes lo reelegirán si juega $e_1 = s_1$ y no lo reelegirán si juega $e_1 \neq s_1$). En este ejemplo tenemos que:

$$\beta(r_2 + E) = 0{,}5 \times (5 + 1) = 3 < 4 = r_1$$

Por lo tanto, el político disonante prefiere jugar $e_1 \neq s_1$ y apropiar las rentas r_1, aún cuando sabe que con esa jugada pierde la elección.

Hemos verificado entonces que: (a) los votantes deducen el tipo del político en el gobierno después de observar su acción; (b) es óptimo para los votantes reelegir si observan $e_1 = s_1$ y votar por el oponente si observan $e_1 \neq s_1$; (c) es óptimo para un político "congruente" elegir $e_1 = s_1$ y para uno "disonante" elegir $e_1 \neq s_1$. Estas jugadas son entonces un equilibrio bayesiano perfecto separador.

4.2 ¿Aprende la ciudadanía en el equilibrio político? ¿Cuáles son las probabilidades que los ciudadanos asignan a que el político en el gobierno sea "congruente" a lo largo del juego?

Sí. Los votantes aprenden en el equilibrio separador. Antes de observar la acción del gobierno, sólo saben que hay una probabilidad de 50% de que el político en el gobierno sea "congruente". Después de observar la acción del gobierno, saben con total certeza cuál es su tipo: 100% de probabilidad de que sea "congruente" si jugó $e_1 = s_1$ y 100% de probabilidad de que sea "disonante" si jugó elegir $e_1 \neq s_1$.

4.3. ¿Cumplen las elecciones el papel de "disciplinar" a los políticos en el equilibrio que encontró? Explique.

No. Los políticos "disonantes" juegan $e_1 \neq s_1$ en este equilibrio. El incentivo que tienen para elegir $e_1 = s_1$ es la reelección, pero en este equilibrio ese incentivo no es suficiente: prefieren obtener las rentas del primer período que abstenerse de hacerlo y esperar a obtener rentas en el segundo período.

4.4. ¿Cumplen las elecciones el papel de seleccionar buenos políticos en el equilibrio que encontró? Explique.

Sí. En este equilibrio, sólo los políticos “congruentes” son reelectos. Por lo tanto, la calidad promedio de los gobiernos en el segundo período es superior a la del primer período.

5.1. En el segundo período los dos tipos de políticos eligen políticas diferentes. El político “congruente” elige informar el verdadero estado de la naturaleza: $e_2 = s_2$, ya que:

$$u_2^c = \begin{cases} E + \Delta = 2 & si \;\; e_2 = s_2 \\ E + 0 = 1 & si \;\; e_2 \neq s_2 \end{cases}$$

El político “disonante” no va a informar el verdadero estado de la naturaleza, es decir que elige $e_2 \neq s_2$, ya que:

$$u_2^d = \begin{cases} E + 0 = 1 & si \;\; e_2 = s_2 \\ E + r_2 > 1 & si \;\; e_2 \neq s_2 \end{cases}$$

5.2. Para determinar si hay un equilibrio semi-separador en torno a la política $e_1 = s_1$, verificamos si hay “estados de la naturaleza” en el primer período con rentas suficientemente pequeñas como para que un político “disonante” esté dispuesto a perderlas haciéndose pasar por “congruente” con el fin de ser reelecto y otros “estados de la naturaleza” en que las rentas del primer período son demasiado “jugosas” como para dejarlas pasar. La condición que debe cumplirse para que exista un equilibrio semi-separador es que:

$1 < \beta(\mu + E) < 9$

Es decir que la utilidad esperada del político “disonante” en el segundo período debe estar entre la renta mínima y la renta máxima que este político puede extraer en el primer período. Si la renta del primer período resulta ser inferior a ese umbral, el político las “deja pasar” y elige $e_1 = s_1$, pero si resulta ser superior, el político elige $e_1 \neq s_1$ y extrae rentas en el primer período. Con los números de este ejemplo, la condición anterior se cumple, ya que:

$1 < \beta(\mu + E) = 0{,}5 \times (5 + 1) < 9$

Entonces, el político “disonante” elige $e_1 = s_1$ toda vez que observa que $r_1 \leq 3$. La probabilidad de que el político “disonante” elija $e_1 = s_1$ es:

$$P(e_1 = s_1|D) = \lambda = P(r_1 \leq 3) = \frac{1}{3}$$

5.3. ¿Aprende la ciudadanía en el equilibrio político? ¿Cuáles son las probabilidades que los ciudadanos asignan a que el político en el gobierno sea “congruente” a lo largo del juego?

Sí, los votantes aprenden en el sentido que la observación de las acciones del gobernante en el primer período le permite actualizar la probabilidad de que el político sea “congruente”:

$$P(C|e_1 = s_1) = \frac{P(C) \times 1}{P(C) \times 1 + P(D) \times P(e_1 = s_1|D)} = \frac{0{,}5 \times 1}{0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 1/3} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \pi$$

5.4. ¿Cumplen las elecciones el papel de "disciplinar" a los políticos en este equilibrio? Explique.

Sí, aunque imperfectamente. Los políticos "disonantes" extraen rentas en el segundo período y se abstienen de hacerlo en el primer período, cuando las rentas que puede extraer no son demasiado elevadas. Existe una probabilidad de 1/3 de que un político "disonante" no ceda a la tentación de extraer rentas en el primer período.

6.1. Determine la probabilidad de que el político disonante elija $e_1 = s_1$.

Si el equilibrio es agrupador, entonces los políticos disonantes eligen $e_1 = s_1$ con certeza. Es decir que $Prob(e_1 = s_1|D) = \lambda = 1$.

6.2. Determine la utilidad esperada de los ciudadanos.

La utilidad esperada de los ciudadanos es: $W(\lambda) = V_1(\lambda) + \beta V_2(\lambda)$, donde:
$V_1(\lambda) = (\pi + (1 - \pi)\lambda)\Delta$
$V_2(\lambda) = (\pi + (1 - \pi)(1 - \lambda)\pi)\Delta$
Siendo $\lambda = 1$, tenemos que la utilidad esperada es: $W(\lambda) = \Delta + \beta\pi\Delta = 1{,}25$
6.3. ¿Cómo influye la proporción de políticos congruentes en la utilidad esperada de los ciudadanos? Fundamente su respuesta.

La utilidad esperada de los ciudadanos es mayor cuanto mayor es la proporción de políticos congruentes:
$$\frac{dW}{d\pi} = \beta\Delta = 0{,}5 > 0$$
En este equilibrio, ambos tipos de políticos eligen $e_1 = s_1$ y son reelectos. La utilidad esperada del primer período no depende entonces de π. Pero sólo si el político que es reelecto resulta ser congruente los ciudadanos obtienen Δ en el segundo período. En caso contrario, obtienen cero. Por lo tanto, la utilidad esperada del segundo período sí es una función creciente de la proporción de políticos congruentes.

7.1. Diga si habrá un equilibrio separador, agrupador o semi-separador. Fundamente su respuesta.

Hay un equilibrio semi-separador, si se cumple que 1< $\beta(\mu + E) < 5$. Hay un equilibrio separador si $\beta(\mu + E) < 1$ y hay un equilibrio agrupador si 5< $\beta(\mu + E)$. En este ejemplo, la renta esperada es: $\mu = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times 5 = 2{,}6$.
Por lo tanto, se verifica que:
$$\beta(\mu + E) = 0{,}5 \times (2{,}6 + 10) = 6{,}3 > 5$$
Y habrá un equilibrio agrupador. La utilidad que se asocia a la reelección es suficientemente elevada como para que el político "disonante" decida abstenerse de extraer rentas en el primer período, aún en la circunstancia en que las rentas son más

"suculentas", es decir aun cuando las rentas adoptan su valor máximo (5 en este ejemplo).

7.2. En el equilibrio que identificó, diga cuál es la probabilidad de que un político "disonante" elija $e_1 = s_1$. Explique.

Esta probabilidad es 1, ya que el político "disonante" siempre elige $e_1 = s_1$ en este equilibrio. Escrito formalmente: $P(e_1 = s_1|D) = \lambda = P(r_1 \leq 6{,}3) = 1$

7.3. ¿Cumplen las elecciones el papel de "disciplinar" a los políticos "disonantes" en el equilibrio que identificó? Explique.

Sí, ya que el político "disonante" elige $e_1 = s_1$ en este equilibrio. Si no hubiera elecciones, el político "disonante" elegiría $e \neq s$ y extraería rentas en ambos períodos. En este equilibrio las elecciones son muy eficaces como mecanismo "disciplinador" ya que, persiguiendo la zanahoria de la reelección, los políticos "disonantes" eligen $P(e_1 = s_1|D) = 1$.