Filtros paso alto, paso bajo y pasabanda

Fernando Borraz

Extracción de señales - dECON 2017

Filtros paso bajo, paso alto y pasabanda

- Existe una familia de filtros que requieren que el investigador especifique de antemano el intervalo de frecuencias correspondientes al componente o señal de interés
- La misma está compuesta por los denominados filtros paso bajo, paso alto y pasabanda

Filtros paso bajo y paso alto

- Los filtros paso bajo, que se anotarán lp, transfieren los componentes asociados a las frecuencias bajas y remueven todos los componentes vinculados a las frecuencias mayores que una determinada frecuencia de corte
- A partir de los filtros paso bajo se puede construir toda la familia de filtros a que se hace referencia en esta clase
- Siguiendo la misma lógica, los filtros paso alto (hp) transfieren los componentes relacionados con las frecuencias altas y remueven los asociados a las frecuencias que están por debajo de una cierta frecuencia de corte. Intuitivamente, un filtro paso alto puede obtenerse operando de la siguiente forma: hp =1-lp

Filtros pasabanda

- La tercera clase de filtros de esta familia son los filtros pasabanda (bp)
- Estos transfieren los componentes asociados a una banda o intervalo de frecuencias y remueven las frecuencias más altas y más bajas. Siguiendo la misma lógica que para los filtros paso alto, los filtros pasabanda o band-pass pueden construirse a través la diferencia entre dos filtros paso bajo: bp = lp_u -lp_l , donde lp_u es el filtro paso bajo cuya frecuencia de corte es más alta y lp_l es el filtro paso bajo asociado a una frecuencia de corte menor
- Contrariamente, los filtros band-stop atenúan una banda específica de frecuencias y permiten el paso de las frecuencias más altas y más bajas

Funciones de transferencia

- Sean ω_l la frecuencia de corte menor y ω_u la frecuencia de corte mayor$\Longrightarrow$

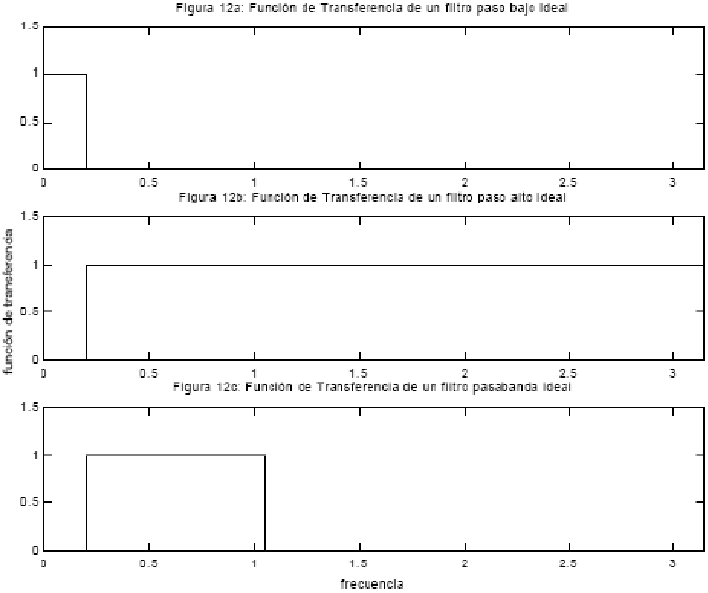
- Función de transferencia de un filtro paso bajo ideal es
$$H^*_{lp}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \text{ si } & |\,\omega\,| < \omega_l \\ 0 \text{ si } & |\,\omega\,| \geq \omega_l \end{array} \right\}$$

- Función de transferencia de un filtro paso alto ideal es:
$$H^*_{up}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \text{ si } & |\,\omega\,| < \omega_u \\ 1 \text{ si } & |\,\omega\,| \geq \omega_u \end{array} \right\}$$

- Función de transferencia de un filtro pasabanda ideal es:
$$H^*_{bp}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \ \omega_l \leq |\,\omega\,| \leq \omega_u \\ 0 \text{ en otro caso} \end{array} \right\}$$

- Ej.: frecuencias de corte: $\omega_l = \frac{\pi}{16}$, $\omega_u = \frac{\pi}{3}$

Funciones de transferencias



Filtro de Baxter-King

- Baxter y King (1995) plantean que un filtro pasabanda ideal deberá seleccionar de los datos originales, los componentes que se encuentren dentro del rango de frecuencias cíclicas, lo que implica eliminar los elementos de baja frecuencia -con periodicidad mayor que 32 trimestres-, asociados a la evolución de largo plazo de las variables, y los de alta frecuencia - con periodicidad menor que 6 trimestres- vinculados a los movimientos estacionales e irregulares de corto plazo

Filtro de Baxter-King

- Esta especificación de los ciclos, resulta en un filtro lineal que consiste en aplicar un caso particular de medias móviles bidireccionales simétricas, de forma de no introducir desfase respecto a los datos originales. Sin embargo, demuestran que la media móvil resultante es de orden infinito, por lo que es necesario buscar una aproximación a este filtro ideal para que sea operativo

- El filtro pasabanda de Baxter y King se construye a partir de la diferencia entre dos filtros paso bajo: $\text{bp} = \text{lp}_u$ -lp_l . La aproximación óptima al filtro paso bajo ideal puede construirse en el dominio del tiempo a través de medias móviles simétricas finitas

Filtro de Baxter-King

- Sea $h(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j L^j$ la representación en el dominio del tiempo de un filtro paso bajo ideal. Los ponderadores del filtro se obtienen a través de la inversa de la transformación de Fourier de la función de respuesta de frecuencia, lo que implica
- $h_0 = \frac{\omega_j}{\pi}, \; j = 0$
- $h_0 = \frac{sen(j\omega_l)}{j\pi}, \; j = \pm 1, 2, ...$
- donde ω_l es la menor frecuencia de corte del filtro paso bajo

Filtro de Baxter-King

- La imposibilidad de construir tal filtro, conduce a la necesidad de buscar una aproximación óptima del mismo, que es obtenida a través de una media móvil finita, y el componente de tendencia surge de
- $I_t^{BP} = \sum_{j=-K}^{K} a_j y_{t-j} = a(L)\, y_t$
- Los ponderadores del filtro, a_j , son determinados resolviendo el siguiente problema de minimización
- $Min_{\{a_j\}} \int_{-\pi}^{\pi} \mid \beta(\omega) - \alpha(\omega) \mid^2 d\omega$
- donde $\beta(\omega)$ es la función de respuesta de frecuencia del filtro paso bajo ideal y $\alpha(\omega)$ es la función de respuesta de frecuencia del filtro aproximado

Filtro de Baxter-King

- Así, $\mid \beta(\omega) - \alpha(\omega) \mid^2$es la función de pérdida o discrepancia que surge de la imposibilidad de aplicar el filtro ideal. La misma proporciona igual ponderación a los errores al cuadrado para las diferentes frecuencias

- Baxter y King muestran que la solución a dicho problema es

- $a_j = \left\{ \begin{array}{lll} h_j & si & j = \pm 1, 2, .., K \\ 0 & si & j > K \end{array} \right\}$

- Así, la aproximación óptima al filtro para un número dado de rezagos (k) que se utilizan para calcular la media móvil, es construida simplemente truncando los ponderadores o pesos del filtro ideal -infinito- en el rezago y el adelanto K

Filtro de Baxter-King

- La elección de K depende del tamaño de la muestra con la que se trabaja y de la necesidad de acercarse al filtro ideal. Un valor más grande de K produce una mejor aproximación al filtro ideal, pero resulta en una mayor pérdida de observaciones

- Adicionalmente, para que el filtro paso bajo óptimo sea capaz de remover una raíz unitaria, se impone la restricción de que la suma de los ponderadores sea uno, es decir que tenga ganancia unitaria para la frecuencia cero y que, por lo tanto, el filtro alto paso correspondiente tenga ganancia cero en la frecuencia cero

Filtro de Baxter-King

- Así, la restricción $\alpha_j(\omega) = 0$ implica que $\alpha_j = h_j + \theta$, donde θ es una constante que depende de K
- El requerimiento que los ponderadores del filtro suman uno implica $\theta = \frac{1 - \sum_{j=-K}^{K} h_j}{2K+1}$
- El filtro pasabanda construido como la diferencia entre dos filtros paso bajo, tiene ponderadores dados por $h_j = h_j^u - h_j^l$
- La restricción en este caso, es que la suma de los ponderadores debe ser cero, por lo que los ponderadores ajustados son$= \left(h_j^u - h_j^l\right) + (\theta_u - \theta_l)$

Filtro de Baxter-King

- Sean las funciones de respuesta de frecuencia de los dos filtros paso bajo $\beta(\omega_l)$ y $\beta(\omega_u)$ respectivamente

- Entonces, la función de respuesta de frecuencia del filtro pasabanda está dada por $\beta(\omega) = \beta(\omega_u) - \beta(\omega_l)$ y la función de transferencia es el cuadrado del valor absoluto de $\beta(\omega)$

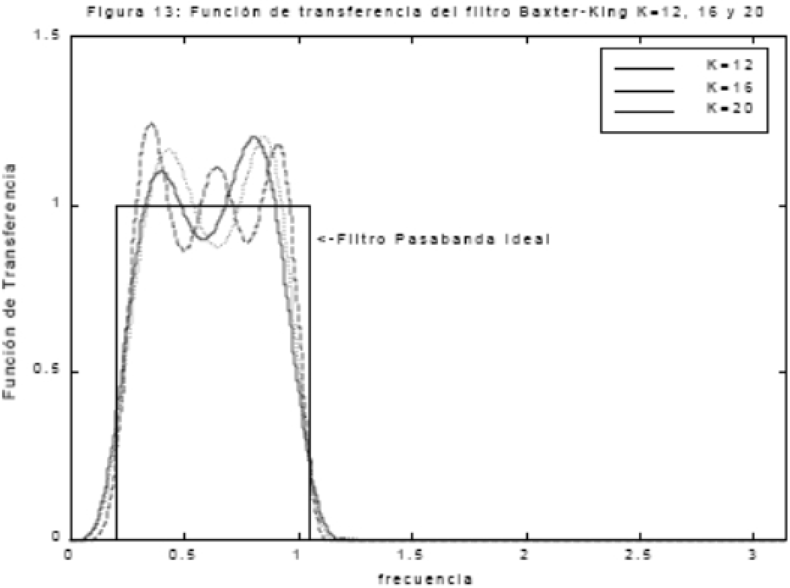
Filtro de Baxter-King

- Baxter y King recomiendan utilizar K=12 para series trimestrales. Se basan para realizar tal recomendación en tres indicadores o estadísticos de resumen y observan su sensibilidad ante modificaciones en el valor de K. Los indicadores son: i) la desviación estándar, como medida de volatilidad; ii) los coeficientes de correlación serial, como indicadores de persistencia; iii) las correlaciones contemporáneas con el producto bruto nacional, como medida de los comovimientos con el ciclo de referencia

- A partir de K=12, estos estadísticos permanecen estables, con lo cual afirman que no resulta necesario incurrir en una mayor pérdida de observaciones para lograr una mejor aproximación al filtro pasabanda ideal

- La función de transferencia del filtro permite apreciar los efectos de truncar los ponderadores del filtro ideal. La misma se presenta en la siguiente figura para K =12, 16 y 20.

Filtro de Baxter-King



Filtro de Baxter-King

- Baxter y King plantean la existencia de dos distorsiones sobre el filtro ideal: leakage y compresión. El concepto de leakage captura la noción de que el filtro mantiene las frecuencias que debe suprimir, además de las que debe retener. De la misma forma, el fenómeno de compresión se refiere a que hay frecuencias que el filtro debe mantener y las comprime. A medida que el valor de K se incrementa estos problemas se atenúan

- De esta forma, el filtro pasabanda de Baxter y King en el dominio del tiempo tiene la forma de una media móvil finita simétrica bidireccional, cuyos ponderadores surgen de la minimización de una función de pérdida

Filtro de Christiano y Fitzgerald (2003)

- Realizan otra aproximación al filtro pasabanda ideal que varía con el tiempo y no es simétrico al contrario del filtro Baxter y King
- La aproximación óptima requiere según estos autores, conocer el proceso generador de datos de la serie. En la práctica, como éste es desconocido, debe ser estimado
- Sin embargo, para las series de tiempo macroeconómicas estándar, una forma más sencilla es asumir que el proceso viene generado por un paseo aleatorio puro y la aproximación es óptima bajo dicho supuesto (que puede ser falso)

Filtro de Christiano y Fitzgerald

- El procedimiento es muy fácil de implementar y está muy cercano al filtro ideal para las representaciones que ajustan bien a los datos norteamericanos tales como las tasas de interés, el desempleo, la inflación y el producto

- A diferencia del filtro BK, el filtro CF utiliza todos los datos de la muestra para estimar los ponderadores, lo que tiene como consecuencia que un filtro no simétrico

- $C_t^{cf} = \sum_{j=t-T}^{t-1} a_j^{cf} Y_t$

Filtro de Christiano y Fitzgerald

- Los coeficientes del filtro, son los que se derivan de resolver el siguiente problema de optimización donde se incorpora como ponderación de cada frecuencia, el pseudo-espectro de un paseo aleatorio

- $Min_{\{a_j\}} \int_{-\pi}^{\pi} \mid \beta(\omega) - \alpha_{cf}(\omega) \mid^2 f(\omega)\, d\omega$

- $f(\omega) = \frac{1}{2[1-\cos(\omega)]}$

- La función f(.) es decreciente en las frecuencias y tiende a infinito en la frecuencia cero. De esta manera, se le otorga mayor peso a las frecuencias bajas

Filtro de Christiano y Fitzgerald

- Resolviendo el problema de minimización se obtienen los coeficientes cuya expresión es la siguiente:

- $a_j^{cf} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}h_0 - \sum\limits_{k=0}^{t-1} h_k \text{ para } j = t-1 \\ h_j \text{ para } j = t-2, ..., T-t-1 \\ \frac{1}{2}h_0 - \sum\limits_{k=j+1}^{0} h_k \text{ para } j = T-t \end{array} \right\}$

- Así, cada valor de la serie output se obtiene mediante un conjunto de coeficientes diferente a los demás, por lo que cada dato tiene asociada una función de ganancia distinta

Filtro de Christiano y Fitzgerald

- Iacobucci (2005) muestra que la representación gráfica en tres dimensiones de esta función de ganancias y donde se puede ver que en algunas posiciones, el filtro deja pasar las frecuencias estacionales
- En CF no se impone ninguna restricción que asegure que la serie output sea estacionaria, por lo cual en caso que la serie original presente una raíz unitaria, la tendencia deberá ser tratada antes de aplicar el filtro

Filtro de Christiano y Fitzgerald

- Existe un trade-off entre las características de estacionariedad y simetría del filtro Baxter y King y la optimalidad del filtro en el sentido que proponen Christiano y Fitzgerald
- Si bien la estacionariedad tiene ventajas econométricas y la simetría garantiza que no existan cambios de fase, CF demuestran que el hecho de que los ponderadores del filtro varíen en el tiempo permite incrementar sustancialmente la cantidad de información contenida en las series originales que puede ser utilizada para estimar el componente cíclico, mientras que la asimetría tiene el mismo efecto, pero en una cuantía menos importante

Críticas a los filtros pasabanda

- Murray (2002): Demuestra que el filtro de Baxter y King, y en general cualquier filtro pasabanda, no aisla el ciclo en un modelo de componentes inobservables con una tendencia estocástica. La primera diferencia de la tendencia pasa a través del filtro, y como resultado, las propiedades espectrales de las series filtradas dependen de la tendencia de la serie original

- Murray agrega que la periodicidad desplegada por el filtro BK al aplicarse al modelo de componentes inobservables proviene de tres fuentes: i) la primera diferencia de la tendencia estocástica, ii) el componente cíclico no observable, y iii) su covarianza

- Sin embargo, en la mayor parte de la literatura existente, la tendencia y el ciclo se suponen incorrelacionados. En este caso, la tercera fuente desaparece

Críticas a los filtros pasabanda

- Benati (2001) muestra que el desempeño de los filtros pasabanda no es invariante respecto a la estructura del proceso input y, dado que la verdadera estructura de la economía es desconocida, resulta imposible determinar a priori si el desempeño del filtro será razonablemente bueno o no

- Estos procedimientos se basan en la extracción de los componentes de una serie que se encuentran al interior de una banda de frecuencias preespecificada, sin considerar el hecho de que tales componentes pueden provenir del filtrado de una tendencia estocástica o de un componente estacionario del proceso

Críticas a los filtros pasabanda

- Como resultado, típicamente aparecen dos tipos de problemas
- En primer lugar, las regularidades estadísticas claves del ciclo económico podrían estar distorsionadas por la presencia de tendencias estocásticas filtradas, lo que se agrava si existe una relación de cointegración entre la serie de interés y la de referencia del ciclo
- En estas circunstancias, el componente cíclico que surge del filtrado pasabanda refleja tanto la relación entre los componentes cíclicos de las dos series como la relación de cointegración entre las dos tendencias estocásticas
- En segundo lugar, el filtrado pasabanda puede crear regularidades empíricas espúreas

Críticas a los filtros pasabanda

- No obstante estas críticas, los filtros pasabanda presentan algunas ventajas sobre el HP. Estas provienen de la prescindencia en la adopción de un parámetro específico, su adecuado comportamiento en los extremos, la determinación a priori del intervalo de frecuencias a extraer, y en general, es más apropiado para filtrar series con frecuencias diferentes a las trimestrales

- Woitek (1998) demuestra que el filtro de Baxter y King reduce el problema de la generación de ciclos espúreos en relación al filtro de Hodrick-Prescott