Repartido Práctico 3: Matrices y Determinantes

Ejercicio 1

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) 2A, ½(A+B), A-B, A^2, AB

b) det(A), det(A+B), det(AB)

c) Indicar, fundamentando, si se cumplen o no las siguientes propiedades
i) $det(A+B) = det(A) + det(B)$ ii) $det(AB) = det(A) * det(B)$

d) det(C), det(C^T), det(5C)
¿Se puede conjeturar algunas propiedades a partir de los resultados obtenidos?

Ejercicio 2

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolver las siguientes ecuaciones en la matriz X:

a) A + X = B **b)** 3A + 4X = 5A **c)** AB = X **d)** AX = B **e)** XA = B

Ejercicio 3

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ Comprobar que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

Ejercicio 4

Encontrar dos matrices $B_{2x2} \neq O$ tal que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} . B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + \gamma & 1 - \alpha \\ 2 + \gamma & 6\alpha - 6\beta - 10 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta & \beta + \gamma \\ 2\beta & -3\alpha - 9\gamma - 6 \end{pmatrix}$,
$\alpha, \beta, \gamma \in R$

Determinar para qué valores de α, β y γ las matrices A y B son iguales.

Ejercicio 6

Probar que si A es una matriz de 2x2 de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, su matriz inversa es:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-c} \\ \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Sea $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Probar que $A^3 = I$. Usar este resultado para calcular A^{-1}.

Ejercicio 8

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular: det (A).
b) Demostrar que A tiene inversa y que $A^{-1} = (A-I)^2$.

Ejercicio 9

Supongamos que A, P y D son matrices cuadradas tales que $A = P.D.P^{-1}$.

Probar que $A^2 = P.D^2.P^{-1}$

Ejercicio 10

Sean los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\boldsymbol{i})\ \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{ii})\ \begin{cases} 3x + 5y = 14 \\ -x + 3y = 14 \end{cases}$$

Se pide:

a) Escribir los sistemas de ecuaciones lineales en notación matricial.
b) Resolver los sistemas de ecuaciones en forma matricial.

Ejercicio 11 _ **Admisión en la Universidad** (tomado de Budnick, p. 216)

La oficina de inscripciones de una gran universidad planea admitir a 7.500 alumnos en el próximo año. El vector columna M indica la distribución esperada de los nuevos estudiantes en las categorías de varones residentes en el estado (VRE), mujeres residentes en el estado (MRE), varones residentes fuera del estado (VRF) y mujeres residentes fuera del estado (MRF):

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3.000 \\ 2.750 \\ 1.000 \\ 750 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} VRE \\ MRE \\ VRF \\ MRF \end{array}$$

El personal de admisión espera que los estudiantes seleccionen su carrera en las escuelas de administración (A), ingeniería (I) y artes y ciencias (AyC) de acuerdo con los porcentajes dados en la matriz P:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{VRE} & \text{MRE} & \text{VRF} & \text{MRF} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}24 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}06 \\ 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}70 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ I \\ AyC \end{array}$$

Se pide: Aplicando operaciones matriciales calcule el número de estudiantes que, según las previsiones, ingresarán a cada escuela.