Repartido Práctico 5.A: Cálculo de Derivadas

Ejercicio 1

Calcular la derivada primera y segunda de las funciones cuyas expresiones analíticas se presentan a continuación:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5$

b) $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 2x$

c) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

e) $f(x) = xe^x$

f) $f(x) = (2-x)^6$

g) $f(x) = e^{x^2+1}$

i) $f(x) = \ln(x) + x - 3$

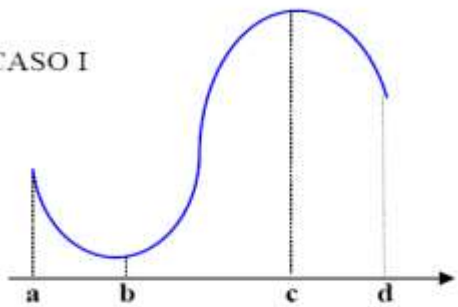
j) $f(x) = \ln(2x+3)$

Repartido Práctico 5.B: Representación gráfica y optimización de funciones

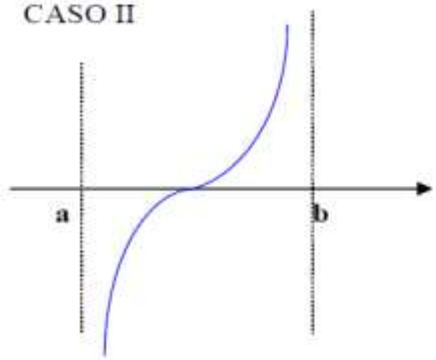
Ejercicio 1

Indicar en cada caso los intervalos de monotonía de la función y, si existen, los puntos de extremos relativos y absolutos.

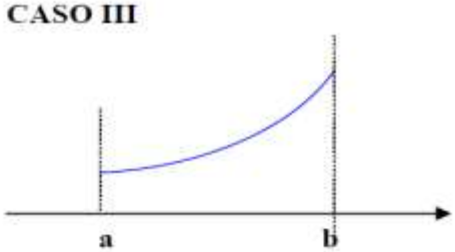
CASO I



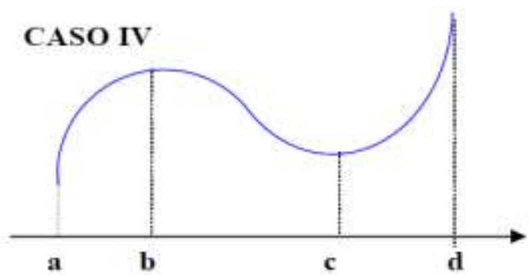
CASO II



CASO III



CASO IV



Ejercicio 2

Estudiar el crecimiento y la concavidad de las siguientes funciones (comprobar los resultados graficando las funciones mediante geogebra):

a) $f : f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$

b) $f : f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Ejercicio 3

El estudio de la evolución del índice de desempleo de un país, a lo largo de los primeros trimestres del año 2019, permitió elaborar el siguiente modelo matemático que lo describe satisfactoriamente:

$$I(t) = 0{,}05t^3 - 0{,}6t^2 + 1{,}8t + 9$$

donde: t: tiempo medido en meses (a partir del 1/1/2019)
I: Índice de desempleo (en porcentaje)

Tómese en cuenta que el presente estudio solo abarca los primeros 3 trimestres del año 2019 (y por lo tanto $0 \leq t \leq 9$).

Se pide:

A) ¿Qué valor tenía el índice de desempleo al 1 de enero de 2019?

B) ¿Qué valor tenía el índice de desempleo al 1 de marzo de 2019?

C) ¿Cuál fue el máximo índice de desempleo a lo largo de este período, y en qué mes tuvo lugar? ¿Cuál fue el mínimo, y en qué momento ocurrió?

D) Al 1 de febrero: ¿el desempleo estaba en alza o en baja? ¿Y al 1 de junio?

Ejercicio 4

Un artículo en una revista de Sociología afirma que si en un cierto país se iniciase ahora un programa específico de servicios de salud, en **t** años **n** miles de personas adultas recibirían beneficios directos, donde

$$n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t \qquad 0 \leq t \leq 12$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

Ejercicio 5

Un organismo de asistencia pública desea calcular la cantidad de asistentes sociales que debe contratar para procesar las solicitudes de ayuda. Se sabe que el costo promedio de procesar una solicitud es una función que depende del número x de asistentes sociales. Esto es $CM(x) = 0{,}001\,x^2 - 5\ln(x) + 60$.

Se pide:

A) ¿Cuál es el número de asistentes sociales que se deben contratar para minimizar el costo promedio por solicitud?

B) ¿Cuál será el costo promedio mínimo?

Ejercicio 6

La función de demanda de un mercado monopólico es p = 400 – 2.q, y la función del costo medio es CM(q) = 0,2.q +4 + (400/q).

a) Determinar el nivel de producción que maximiza la utilidad.
b) Determinar el precio al que ocurre la utilidad máxima.
c) Determinar la utilidad máxima.
d) Si como medida regulatoria, el gobierno impone un impuesto de $22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?
e) ¿Cuáles son las consecuencias del impuesto para el monopolista, los consumidores y el gobierno, si el precio se fija de forma de maximizar la utilidad?

Ejercicio 7

En un restaurante de tenedor libre la función de costos tiene la siguiente fórmula: $C(q) = 25q^2 + 10q + 30.625$ donde q representa la cantidad de clientes atendidos al mismo tiempo.

i) Hallar la función de costo promedio por cliente.
ii) ¿Para qué cantidad de clientes se hace mínimo el costo promedio por cliente, y cuánto vale dicho mínimo?
iii) Si además se sabe que la cantidad de clientes no baja de 10 y no puede superar los 50. ¿para qué cantidad de clientes se hace máximo el costo promedio por cliente y cuánto vale dicho máximo?

Ejercicio 8

Una empresa se dedica a la producción y venta de cierto electrodoméstico. Los costos que enfrenta se pueden dividir en dos tipos: costos fijos (por ejemplo, alquiler del local y ciertos impuestos) y costos variables, los que dependen de la cantidad producida del electrodoméstico (se asocian a mano de obra, materiales).

Todos ellos pueden ser integrados en la siguiente función de Costo Total:

$$C : R^+ \cup \{0\} \to R \;\Big|\; C(q) = 4q^2 + 100q + 10.000$$

donde q es la cantidad producida del electrodoméstico y C(q) está expresado en dólares.

Se pide:

A) ¿Cuánto aumenta el costo de producción si la empresa pasa de producir 100 unidades a producir 101? ¿y de 240 a 241?

B) La derivada de la función de costos habitualmente es llamada ***función de costo marginal***. Calcularla en este caso.

C) Comparar C’(100) y C’(240) con los valores obtenidos en a).

Repartido Práctico 8.C: Elasticidad

Ejercicio 1

Sea la función de demanda: $q = f(p) = 1000/p^2$

a) Hallar la elasticidad puntual de la demanda.
b) ¿Depende la elasticidad del nivel del precio en este caso?
c) ¿Cuál sería el cambio relativo aproximado en la demanda si el precio p aumenta un 10 %?

Ejercicio 2

Sea la función de demanda: $q = f(p) = 500/(p+2)$

a) Hallar la elasticidad puntual de la demanda.
b) ¿Existe algún nivel de precio para el cual la elasticidad es unitaria?
c) ¿Cuál sería el cambio relativo aproximado en la demanda si el precio p aumenta un 10 %?

Ejercicio 3

Sea la función f: $f(x) = \alpha.x^{\beta}$. Probar que la elasticidad puntual de f es β $\forall$ x. (Si la función f es una potencia de x, entonces la elasticidad es igual al exponente).