Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

# NOTAS DEL CURSO

# MATEMÁTICAS PARA LAS CIENCIAS SOCIALES

# TOMO 1

Montevideo, Febrero de 2020

# Introducción

Las presentes notas pretenden ayudar al estudiante que realiza el curso de “Matemática para las Ciencias Sociales” brindándole los conceptos teóricos, así como ejemplos y aplicaciones prácticas a las Ciencias Sociales que le muestren la utilidad de la Matemática en el campo de las disciplinas científicas sociales.

Estas notas toman como punto de partida las elaboradas hace ya unos años por David Glejberman para el Departamento de Economía de la Facultad y fueron revisadas, ampliadas posteriormente por Florencia Amábile, Nicolás Bonino, Sebastián Chocca, Horacio Lena, Guillermo Lezama, Irene Mussio y Nicolás Reig.

Los temas que incluyen son los tratados en el curso, a saber:

- Capítulo 1: Sistemas de ecuaciones lineales.
- Capítulo 2: Matrices.
- Capítulo 3: Cálculo de derivadas.
- Capítulo 4: Cálculo integral.
- Capítulo 5: Funciones de varias variables.
- Capítulo 6: Optimización de funciones de varias variables.
- Capítulo 7: Sucesiones y series numéricas.

# 1. Sistemas de ecuaciones lineales

En las Ciencias Sociales a veces nos interesa determinar si un conjunto de variables cumplen con determinadas condiciones. Si podemos escribir las condiciones que deben cumplir estas variables en forma de ecuaciones, entonces podríamos determinar si hay valores que cumplan con ellas. Por ejemplo, queremos hallar la forma de distribuir el presupuesto total de un centro de enseñanza de niños entre compra de materiales, alimentos y docentes. Sabemos que el gasto en docentes es el doble del gasto realizado entre materiales y alimentos. Finalmente, sabemos que el costo medio de los materiales es $\alpha$, el de los alimentos es $\beta$ y el de los docentes $\gamma$. Si podemos escribir las condiciones en forma de ecuaciones, entonces podríamos determinar si existe una solución que cumpla con las condiciones, si existen infinitas soluciones o si no existe solución.

En este capítulo nos centraremos en entender cómo debemos plantear problemas como el del ejemplo anterior y cuáles son los métodos utilizados para su resolución.

## 1.1. Ecuaciones

Sean $f$ y $g$ dos funciones cuyos dominios son conjuntos de números (cuando dependen de una sola variable) o cuyos dominios son conjuntos de pares, ternas, etc. de números (cuando las funciones dependen de dos, tres o más variables). En todos los casos, los codominios de las funciones son conjuntos de números.

**Definición 1.** **Ecuación**. Considérese una nueva entidad matemática llamada ***ecuación*** que tiene la forma:

$$f = g$$

Si las funciones dependen de una sola variable, entonces $f(x) = g(x)$ es una ecuación "en $x$". Si las funciones dependen de dos variables, entonces $f(x, y) = g(x, y)$ es una ecuación "en $x$ e $y$"; en tres variables se tiene la ecuación $f(x, y, z) = g(x, y, z)$.

Las letras $x, y, z$ se conocen como "incógnitas" de la ecuación.

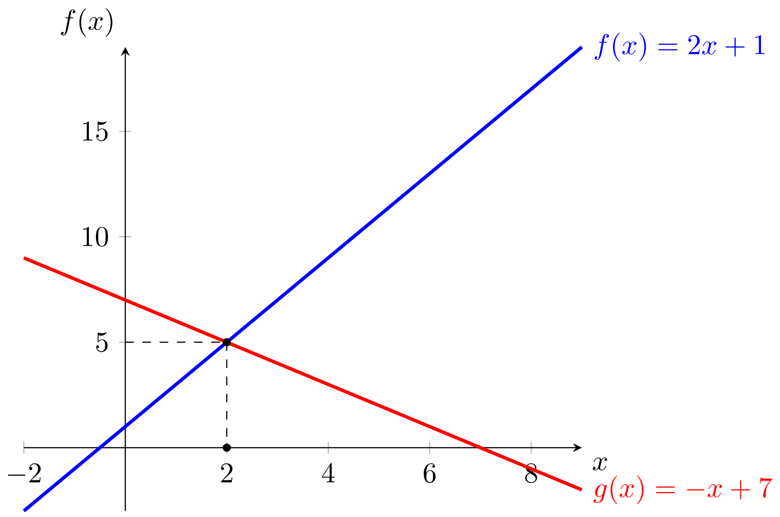
**Definición 2.** Resolver la ecuación $f = g$ consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de $f$ y $g$ que hacen que los valores de las funciones (las imágenes) coincidan. El conjunto de elementos que satisfacen la igualdad $f(x) = g(x)$, o bien las igualdades $f(x, y) = g(x, y)$ o $f(x, y, z) = g(x, y, z)$, se denomina conjunto solución de la ecuación y cada elemento de dicho conjunto recibe el nombre de solución de la ecuación.

**Ejemplo 1**: Si $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = -x+7$, es fácil demostrar que la ecuación $2x+1 = -x+7$ tiene por única raíz $x = 2$. El conjunto solución es $S = \{x|x = 2\}$.

**Ejemplo 2:** $Sif(x, y) = 3x + 3y$ y $g(x, y) = x + y + 2$, entonces la ecuación $3x + 3y = x + y + 2$ tiene como conjunto solución $S = \{(x, y)|y = -x + 1\}$, el cual contiene infinitos pares de números reales que son solución de la ecuación. Por ejemplo, si le damos a $x$ el valor 0, se deduce que $y$ debe valer 1, y tenemos entonces que $(x, y) = (0, 1)$ es solución de la ecuación. Si hacemos que $x$ valga 2, entonces $y$ debe valer $-1$ y tenemos entonces que $(x, y) = (2, -1)$ también es solución de la ecuación. La ecuación, por lo tanto, tiene infinitas soluciones.

Desde el punto de vista gráfico, el conjunto solución de una ecuación está formado por las primeras coordenadas de los puntos donde se intersectan los gráficos de las funciones $f$ y $g$.

Así, en el Ejemplo 1, la única raíz ($x = 2$) es la abscisa (primera coordenada) del punto donde se intersectan las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = -x + 7$, cuyos gráficos se representan por dos rectas en un par de ejes cartesianos ortogonales.




Si $f(x)$ es un polinomio y $g(x) = 0$, entonces resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ equivale al problema de encontrar las raíces del polinomio $f(x)$. Para resolver ecuaciones más generales es necesario enunciar algunas propiedades.

**Definición 3.** Dos **ecuaciones son equivalentes** si sus conjuntos solución son iguales. En este caso ambas ecuaciones se trazan como la misma línea recta y tienen un número infinito de valores en común. Al representarse por la misma recta ambas tienen la misma pendiente $x$ y la misma intersección de $x$.

**Observación**: si dos ecuaciones no tienen soluciones, entonces son equivalentes, pues en ambos casos, el conjunto solución es el conjunto vacío.

Algunas propiedades de las ecuaciones:

1. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) + K = g(x) + K$ son equivalentes para todo $K \in R$.
2. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) - g(x) = 0$ son equivalentes.
3. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $K.f(x) = K.g(x)$ son equivalentes para todo $K \in R, K \neq 0$.

## 1.2. Sistemas de ecuaciones lineales

<u>**Definición 4.**</u> **Ecuación lineal**. Una ecuación se dice lineal cuando las funciones intervinientes $f$ y $g$ son funciones polinómicas de hasta grado 1 (en una o varias variables).[1] Por ejemplo, tanto las funciones del ejemplo 1 como las del ejemplo 2 son todas lineales, por lo tanto las ecuaciones que definen se dicen lineales:

Ejemplo 1: $2x + 1 = -x + 7$
Ejemplo 2: $3x + 3y = x + y + 2$

Por el contrario, las siguientes ecuaciones no son lineales, pues por lo menos una de las funciones que las definen no es lineal.

$$x^2 + 2x - 1 = 3x + 4; \qquad e^x = 6$$

En la primera ecuación la función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ no es lineal, pues se trata de un polinomio de segundo grado, mientras que en la segunda ecuación, la función claramente no es una función polinómica.

<u>**Definición 5.**</u> **Sistema de ecuaciones**. Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de las cuales interesan las soluciones comunes. Sean $S_1, S_2, S_3, ..., S_m$ son las soluciones de las ecuaciones del sistema de $m$ ecuaciones. Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar la intersección de sus conjuntos solución, es decir, encontrar aquellas soluciones que verifican todas las ecuaciones al mismo tiempo.

Conjunto solución del sistema: $S = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3 \bigcap ... \bigcap S_m$.

**Ejemplo 3**: Queremos encontrar el conjunto solución para el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 5y = 6 \end{cases}$$

La llave a la izquierda indica que el par de ecuaciones forma un sistema, esto es, que interesa encontrar el conjunto de pares $(x, y)$ que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

La forma de un sistema de ecuaciones lineales con $m$ ecuaciones y $n$ incógnitas es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Si $b_1, b_2, ..., b_m$ valen todos cero, entonces el sistema lineal se dice *homogéneo*. Si el sistema lineal es homogéneo, entonces el conjunto solución no es vacío (siempre tiene raíces); nótese que en este caso una raíz trivial es $(x_1, x_2, ..., x_n)|x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

[1] "Ya los griegos antiguos conocían métodos de resolución de las ecuaciones lineales y cuadráticas [en las que las funciones intervinientes son polinomios de hasta segundo grado]. La solución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados fue obtenida gracias a los esfuerzos de los matemáticos italianos del Ferro, Tartaglia [1500-1557, de nombre Niccolò Fontana, apodado Tartaglia -tartamudo, nacido en Brescia], Cardano [1501-1576, nacido en Pavía] y Ferrari [1522-1565, nacido en Bolonia] en el siglo XV, en la época del Renacimiento, cuando comenzó el despertar de las matemáticas europeas después del letargo medieval."; Tijonov, A.N.; Kostomárov, D.P.; "Algo acerca de la matemática aplicada", Editorial Mir, Moscú, pp. 121-122.

**Definición 6.** **Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales**. Todo sistema de ecuaciones lineales puede clasificarse en una y solo una de tres categorías:

a. ***Sistema compatible determinado***: el sistema tiene una única solución.

b. ***Sistema compatible indeterminado***: el sistema tiene infinitas soluciones.

c. ***Sistema incompatible***: el sistema no tiene solución (el conjunto solución es el conjunto vacío).

**Proposición 1: Condición necesaria para que un sistema sea compatible determinado.** Si un sistema de ecuaciones es compatible determinado, entonces tiene por lo menos tantas ecuaciones como incógnitas.

**Nota**: De lo anterior se deduce que si un sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas, el mismo o será incompatible o será compatible indeterminado, pero no podrá ser compatible determinado.

Presentaremos a continuación algunas propiedades que resultarán muy útiles para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

**Definición 7.** Dos sistemas de ecuaciones son ***equivalentes*** si sus conjuntos solución son iguales.

***Propiedades de los sistemas de ecuaciones:***

1. Si se aplican las propiedades 1 a 3 de las ecuaciones a cualquiera de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
2. Si se cambia el orden de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.
3. Si a una ecuación se le suma o resta un múltiplo de otra, se obtiene un sistema equivalente.

**Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales**

Existen diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales: igualación, sustitución, reducción, método gráfico, de Cramer.

En el curso nos concentraremos en la aplicación del ***método de reducción***, también conocido como *método de Gauss* o *método de la escalera* (o de *eliminación*).[2] Este método se basa en la aplicación reiterada de la propiedad número 3 de las ecuaciones y de la propiedad número 3 de los sistemas de ecuaciones, generando ceros en los coeficientes $a_{ij}$ por debajo de los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}$, etc.

**Ejemplo 4**: Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 2y + z &= 7 \\ 3x - 4y - z &= -1 \end{cases}$$

[2] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un astrónomo, físico y matemático nacido en Brunswick (en la actual Alemania). Fue apodado “Príncipe de la Matemática” por los colegas de su época. El gráfico de la función de densidad normal (Estadística) se conoce como “campana de Gauss” en su honor.

Vamos a resolver el sistema por el método de reducción. En primer lugar, vamos a colocar la segunda ecuación como primera, para facilitarnos los cálculos.

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 7 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ 3x - 4y - z &= -1 \end{cases}$$

A continuación, vamos a generar un cero en el primer coeficiente de la segunda ecuación, sumándole a la segunda ecuación la primera multiplicada por $(-2)$. Esto equivale a eliminar la incógnita "$x$" de la segunda ecuación (de ahí que también se conozca a este método como de "eliminación"). La ecuación resultante de esta operación la ubicamos en lugar de la antigua ecuación 2.

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 7 \\ -y - 4z &= -13 \\ 3x - 4y - z &= -1 \end{cases}$$

En el siguiente paso, generamos un cero en el primer coeficiente de la tercera ecuación, sumándole a esta la primera multiplicada por $(-3)$, y sustituimos la ecuación 3 antigua por la ecuación resultante de esta operación.

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 7 \\ -y - 4z &= -13 \\ -10y - 4z &= -22 \end{cases}$$

Se puede sumar a la tercera ecuación la segunda multiplicada por (-10) para generar un cero en el coeficiente de "$y$" en la tercera ecuación, y entonces se obtiene:

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 7 \\ -y - 4z &= -13 \\ 36z &= 108 \end{cases}$$

Ahora puede verse el sistema completamente escalerizado. En virtud de las propiedades enunciadas más arriba, este sistema es equivalente del primero, es decir, tiene el mismo conjunto solución. En el último peldaño de la escalera se puede despejar el valor de la incógnita $z : z = 108/36 = 3$. Si se sube un peldaño y se sustituye en la segunda ecuación $z$ por el valor recién calculado, entonces se obtiene: $-y - (4)(3) = -13$, y despejando resulta: $y = 1$. Finalmente, subiendo un peldaño más y sustituyendo en la primera ecuación por los valores hallados de "$y$" y de "$z$", se tiene: $x + (2)(1) + 3 = 7$, y despejando la $x$ resulta: $x = 2$. Encontramos entonces una única solución $(x, y, z) = (2, 1, 3)$. Por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Conviene que el estudiante verifique que la solución encontrada es la correcta, para lo cual puede sustituir los valores hallados de "$x$", "$y$" y "$z$" en las tres ecuaciones iniciales del sistema y comprobar si las verifican.

**Ejemplo 5**: Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z &= 10 \\ 3x - y + 3z &= 6 \\ x + y + 2z &= 5 \end{cases}$$

Eliminando la incógnita "$x$" de la segunda y tercera ecuación, se obtiene el siguiente sistema equivalente al inicial:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z &= 10 \\ \quad -8y - 6z &= -18 \\ \qquad\qquad 0 &= 0 \end{cases}$$

Al eliminar "$x$" de la tercera ecuación, observamos que también se eliminan "$y$", "$z$" y la constante, con lo cual la ecuación resultante es: $0 = 0$. Esto se debe a que la primera y la tercera ecuación del sistema original eran múltiplos (es fácil apreciar que la primera ecuación es el doble de la tercera). Por ende, la tercera ecuación era equivalente a la primera, por lo cual no nos aporta nada nuevo de lo que ya nos decía la primera ecuación, y por eso, da lo mismo descartarla y quedarnos solamente con las dos primeras ecuaciones.

El sistema entonces queda reducido a:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z &= 10 \\ \quad -8y - 6z &= -18 \end{cases}$$

Este sistema no puede seguir reduciéndose. No contiene inconsistencias, por lo tanto es un sistema compatible. Además, dado que es un sistema con tres incógnitas y solo dos ecuaciones, será compatible indeterminado.

Para hallar las soluciones del sistema podemos despejar de la segunda ecuación cualquiera de las incógnitas; por ejemplo, si despejamos "$z$", obtendremos:

$$z = \frac{18 - 8y}{6} = \frac{9 - 4y}{3}$$

Y sustituyendo en la primera ecuación, podremos despejar "$x$", que quedará expresada, al igual que "$z$", en términos de "$y$":

$$x = \frac{5y - 3}{3}$$

De esta manera, llegamos a la conclusión de que las soluciones del sistema de ecuaciones son de la forma:

$$(x, y, z) = \left( \frac{5y - 3}{3}, y, \frac{9 - 4y}{3} \right)$$

Para cada valor de "$y$", se obtiene una solución distinta del sistema. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Rightarrow \quad (-1, 0, 3) \\ y = 1 \quad &\Rightarrow \quad (\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}) \\ y = -2 \quad &\Rightarrow \quad (\frac{-13}{3}, -2, \frac{17}{3}) \end{aligned}$$

Dado que "$y$" puede tomar infinitos valores, entonces tendremos infinitas soluciones del sistema, corroborándose por lo tanto que el sistema es *compatible indeterminado*.

**Ejemplo 6**: Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 3 \\ 4x - 6y &= 5 \end{cases}$$

Si escalerizamos este sistema, obtenemos el siguiente sistema equivalente al original:

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 3 \\ \qquad 0 &= -1 \end{cases}$$

La última ecuación representa una incoherencia, pues $0 \neq -1$. Esto implica que el *sistema es incompatible* (no tiene solución).

En el capítulo sobre Matrices volveremos sobre el método de reducción o de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero utilizando en ese caso el enfoque matricial.

**Ejemplos de aplicación**

Presentaremos a continuación algunos ejemplos de aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales a situaciones de la realidad. Los mismos provienen del libro "Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales", de Frank S. Budnick (2006).

**Ejemplo 7: Transporte aéreo de emergencia** (basado en el ejemplo 22, pp. 74-75, Budnick(2006)).

La Cruz Roja Internacional está haciendo planes para transportar por avión alimentos y suministros médicos a una gran ciudad de Sudamérica que hace poco sufrió una devastadora inundación. En la tabla adjunta se incluyen los cuatro suministros que urgen y sus respectivos volúmenes por caja o recipiente. El primer avión que se enviará a la zona tiene una capacidad de volumen de 200 $m^3$.

| Suministro | Volumen por caja (en $m^3$) |
|---|---|
| Sangre | 0,50 |
| Equipo médico | 0,85 |
| Alimentos | 0,25 |
| Agua | 0,15 |

El primer paso en cualquier problema formulado con palabras es definir las incógnitas o variables que van a emplearse. Conviene preguntarse qué decisiones deben tomarse en el problema. Si las decisiones logran identificarse, en ellas estará la clave para definir las variables.

En el presente ejemplo, la decisión que afronta el personal de la Cruz Roja se refiere a cuántas cajas de cada suministro se enviarán en el primer avión. La Cruz Roja quiere enviar la mayor cantidad de suministros en él, por lo cual desea identificar las diversas combinaciones que llenarán el avión en toda su capacidad (en volumen).

Expresada en otras palabras la ecuación que se busca tendrá la siguiente forma:

$$\text{Volumen de suministros embardados} = 200m^3$$

Se puede ser más específicos y reescribir la ecuación como:

Volumen de sangre + Volumen de equipos médicos + Volumen de alimentos + Volumen de agua = 200

Si se define:
$x_1$ = número de recipientes de sangre
$x_2$ = número de cajas de equipo médico
$x_3$ = número de cajas de alimentos

$x_4$ = número de recipientes de agua

la ecuación puede expresarse en su forma matemática correcta como:

$$0,50x_1 + 0,85x_2 + 0,25x_3 + 0,15x_4 = 200$$

Verifíquese que cada término del miembro izquierdo de la ecuación se forma empleando la relación:
Volumen total del suministro = (Volumen por caja o recip. del suministro) * (N° cajas del suministro)

Supongamos que además de la restricción de volumen, existe la siguiente restricción de peso: el avión puede transportar solo una carga de 26.200 kilos y los suministros pesan 60, 92, 50 y 28 kilos por caja o recipiente, respectivamente.

La restricción de peso también la podemos expresar mediante una ecuación utilizando las incógnitas definidas anteriormente:

$$60x_1 + 92x_2 + 50x_3 + 28x_4 = 26200$$

El problema de la Cruz Roja ahora es determinar cuántas cajas o recipientes de cada suministro puede cargar en el avión de forma tal de cumplir con las restricciones de volumen y de peso. Nos queda definido entonces un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} 0,50x_1 + 0,85x_2 + 0,25x_3 + 0,15x_4 & = 200 \\ \qquad 60x_1 + 92x_2 + 50x_3 + 28x_4 & = 26200 \end{cases}$$

Escalerizando el sistema, se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 0,50x_1 + 0,85x_2 + 0,25x_3 + 0,15x_4 & = 200 \\ \qquad\qquad -10x_2 + 20x_3 + 10x_4 & = 2200 \end{cases}$$

El sistema resulta ser compatible indeterminado. Podemos expresar las soluciones del mismo, despejando el valor de dos de las incógnitas en función de las restantes dos. Por ejemplo, si despejamos el valor de $x_2$ en la segunda ecuación nos queda:

$$x_2 = 2x_3 - x_4 - 220$$

Y sustituyendo en la primera ecuación, podemos despejar otra incógnita, por ejemplo, $x_1$, obteniendo:

$$x_1 = 774 - 3,9x_3 - 2x_4$$

La solución general del sistema de ecuaciones es, por lo tanto:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (774 - 3,9x_3 - 2x_4; 2x_3 - x_4 - 220; x_3; x_4)$$

Suponiendo valores para dos de las cuatro incógnitas, podemos resolver para los valores de las dos restantes y obtener algunas soluciones particulares. Por ejemplo:

Si $x_3 = 60$, $x_4 = 120$, entonces: $x_1 = 300$, $x_2 = 20$.

Es decir, si se llevan 60 cajas de alimentos y 120 recipientes de agua, se podrán cargar en el avión 300 recipientes de sangre y 20 cajas de equipo médico.

¿Cuántos recipientes de sangre y cuántas cajas de equipo médico se podrán cargar en el avión si se decide llevar 80 cajas de alimentos y 200 recipientes de agua?

**Ejemplo 8: Menú de comida** (basado en el ejercicio 9, p. 159, Budnick(2006))

Un dietista está planeando el menú de comida de mediodía para una escuela de enseñanza media. Se están estudiando 4 vitaminas para su inclusión en la comida, caracterizada cada una por distinto aporte nutricional.

La meta es que el contenido nutricional de la comida cumpla con los niveles diarios mínimos para las cuatro vitaminas. En la siguiente tabla se resume el contenido vitamínico por 100 gramos de cada alimento, expresado en miligramos (mg). Además, se indica el nivel mínimo diario de las cuatro vitaminas, también en miligramos.

| Vitamina | Niveles diarios requeridos | Alimento | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Carne | Pescado | Verduras | Frutas |
| 1 | 14 | 4 | 3 | 0 | 2 |
| 2 | 21 | 5 | 3 | 3 | 0 |
| 3 | 23 | 0 | 2 | 6 | 4 |
| 4 | 8 | 0 | 0 | 2 | 3 |

El problema a resolver es qué cantidad de cada alimento debe incluirse para alcanzar los niveles diarios requeridos de cada vitamina.

Podemos expresar este problema en términos de un sistema de ecuaciones lineales y aplicar los procedimientos vistos anteriormente.

Para ello vamos a definir cuatro incógnitas:
$w$ = Cantidad de carne (en 100 gramos)
$x$ = Cantidad de pescado (en 100 gramos)
$y$ = Cantidad de verduras (en 100 gramos)
$z$ = Cantidad de frutas (en 100 gramos)

Si prestamos atención a la primera fila del cuadro, correspondiente a la vitamina 1, podemos expresar sus requerimientos diarios en términos de cantidades de alimentos a través de la siguiente ecuación:

$$4w + 3x + 0y + 2z = 14$$

Si nos concentramos ahora en la segunda vitamina, la ecuación que representa sus requerimientos diarios resulta ser:

$$5w + 3x + 3y + 0z = 21$$

Razonando de igual manera para las demás vitaminas, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4w + 3x + 0y + 2z &= 14 \\ 5w + 3x + 3y + 0z &= 21 \\ 0w + 2x + 6y + 4z &= 23 \\ 0w + 0x + 2y + 3z &= 8 \end{cases}$$

Aplicando el método de eliminación, se arriba al siguiente sistema equivalente (prueba tú a hacerlo por tu cuenta y comprueba que llegas a este resultado):

$$\begin{cases} 4w + 3x + 0y + 2z &= 14 \\ -3x + 12y - 10z &= 14 \\ 42y - 8z &= 97 \\ 71z &= 71 \end{cases}$$

Despejando las incógnitas y sustituyendo en las ecuaciones anteriores, se obtiene una única solución para el sistema, que es:

$$(w, x, y, z) = (1,5; 2; 2,5; 1)$$

Por lo tanto, para cumplir con los requerimientos diarios de vitaminas, la comida deberá incluir 150 gramos de carne ($150 = 1,5 \times 100$), 200 gramos de pescado ($200 = 2 \times 100$), 250 gramos de verduras ($250 = 2,5 \times 100$) y 100 gramos de frutas ($100 = 1 \times 100$).