Solución Práctico Nº1: Sistemas de ecuaciones lineales

Matemática 2 - FCS - UDELAR

2024

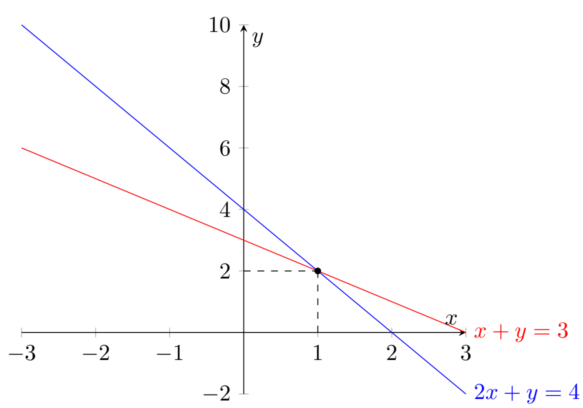
Ejercicio 1.

a. Resolvemos por escalerización:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 4 \\ x+y & = & 3 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1-E_2} \left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y & = & 4 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$$

Sustituyendo $x = 1 \Rightarrow 2(1) + y = 4 \Rightarrow y = 2$.

SCD: $S = \{(1,2)\}$ Representación gráfica:

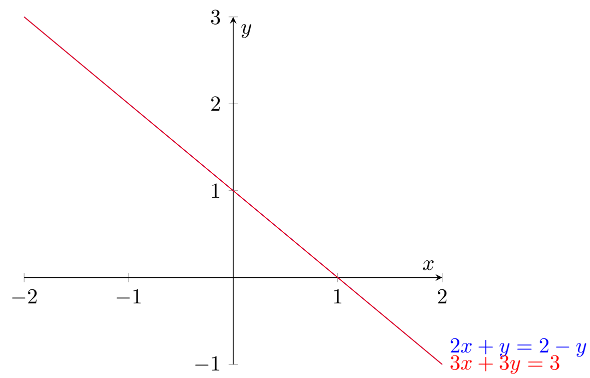


b. Resolvemos por escalerización:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y & = & 2-y \\ 3x+3y & = & 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x+2y & = & 2 \\ 3x+3y & = & 3 \end{array}\right. \xrightarrow{3E_1-2E_2} \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y & = & 2 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Sistema compatible indeterminado: $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$.

SCI: $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in\mathbb{R}, y=1-x\}=\{(x,1-x),x\in\mathbb{R}\}$ Representación gráfica:

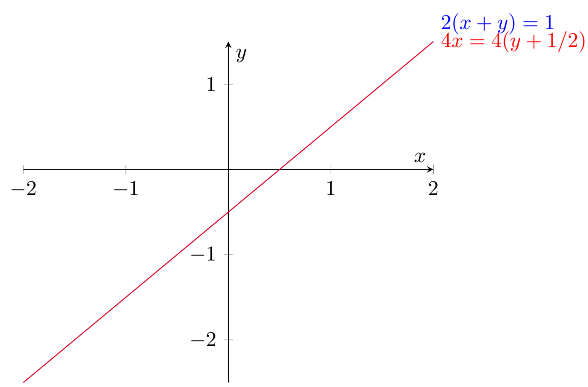


c. Resolvemos por escalerización:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2(x-y) & = & 1 \\ 4x & = & 4(y+1/2) \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x-2y & = & 1 \\ 4x-4y & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1-\frac{1}{2}E_2} \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Sistema compatible indeterminado: $2x-2y=1 \Rightarrow y=\frac{2x-1}{2}$.

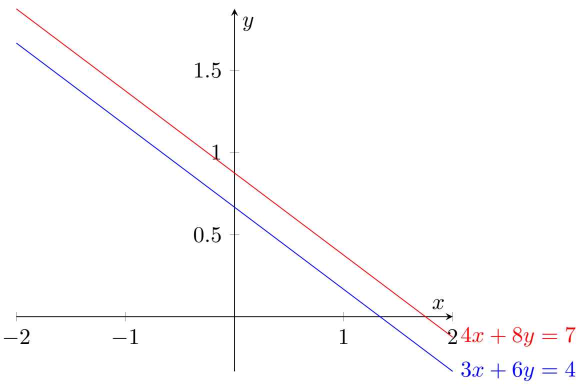
SCI: $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in\mathbb{R}, y=\frac{2x-1}{2}\}=\{(x,\frac{2x-1}{2}),x\in\mathbb{R}\}$ Representación gráfica:



d. Resolvemos por escalerización:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+6y & = & 4 \\ 4x+8y & = & 7 \end{array}\right. \xrightarrow{4E_1-3E_2} \left\{\begin{array}{rcl} 3x+6y & = & 4 \\ 0 & = & -5 \end{array}\right.$$

El conjunto solución de la última ecuación es $\emptyset$, por lo tanto el sistema es incompatible. Representación gráfica:

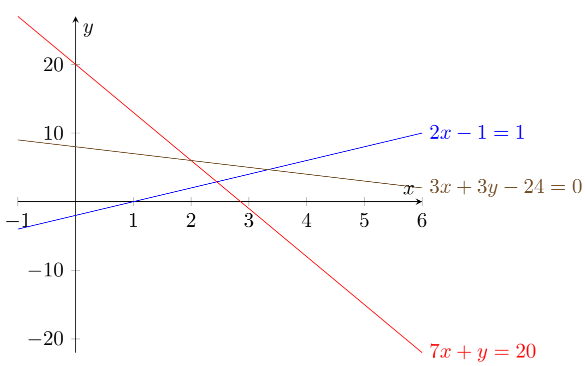


e. Resolvemos por escalerización:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ 7x+y & = & 20 \\ 3x+3y & = & 24 \end{array}\right. \xrightarrow{1/2E_1} \left\{\begin{array}{rcl} x-\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ 7x+y & = & 20 \\ 3x+3y & = & 24 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2-7E_1} \left\{\begin{array}{rcl} x-\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2}y & = & \frac{33}{2} \\ 3x+3y & = & 24 \end{array}\right. \xrightarrow{E_3-3E_1} \left\{\begin{array}{rcl} x-\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2}y & = & \frac{33}{2} \\ \frac{3}{2}y & = & \frac{45}{2} \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{5}E_2} \left\{\begin{array}{rcl} x-\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ y & = & -\frac{33}{5} \\ \frac{3}{2}y & = & \frac{45}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{-\frac{2}{3}E_3} \left\{\begin{array}{rcl} x-\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ y & = & -\frac{33}{5} \\ y & = & 15 \end{array}\right. \xrightarrow{E_3-E_2} \left\{\begin{array}{rcl} x-\frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2} \\ y & = & -\frac{33}{5} \\ 0 & = & \frac{42}{5} \end{array}\right.$$

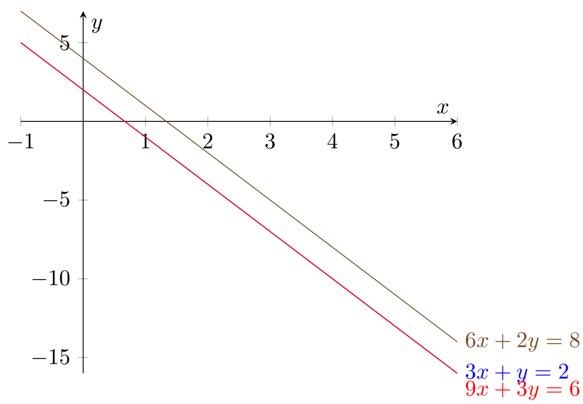
El conjunto solución de la última ecuación es $\emptyset$, por lo tanto el sistema es incompatible. Representación gráfica:



f. Resolvemos por escalerización:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y & = & 2 \\ 9x+3y & = & 6 \\ 6x+2y & = & 8 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2-3E_1} \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y & = & 2 \\ 0 & = & 0 \\ 6x+2y & = & 8 \end{array}\right. \xrightarrow{E_3-2E_1} \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y & = & 2 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 4 \end{array}\right.$$

El conjunto solución de la última ecuación es $\emptyset$, por lo tanto el sistema es incompatible.
Representación gráfica:



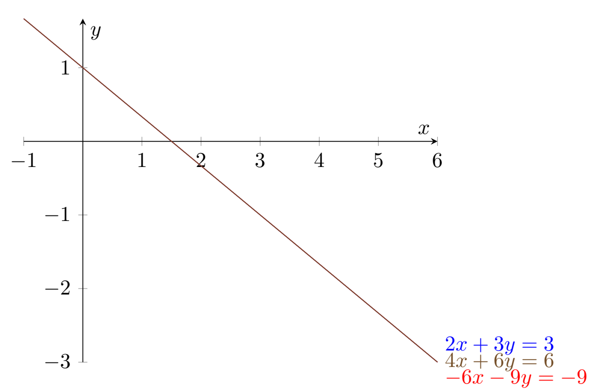
g. Resolvemos por escalerización:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y & = & 3 \\ -6x-9y & = & -9 \\ 4x+6y & = & 6 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2+3E_1} \left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y & = & 3 \\ 0 & = & 0 \\ 4x+6y & = & 6 \end{array}\right. \xrightarrow{E_3-2E_1} \left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y & = & 3 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Las últimas 2 ecuaciones tienen como conjunto solución a $\mathbb{R}^2$, por lo tanto podemos descartarlas. El conjunto solución del sistema es simplemente el conjunto solución de la primer ecuación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{R}, x = \frac{3-3y}{2}\} = \{(\frac{3-3y}{2}, y), y \in \mathbb{R}\}$$

Representación gráfica:



Ejercicio 2.

a.
$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & 3 \\ 3x-2y+z & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Reordenamos:}} \left\{\begin{array}{rcr} x-2y+2z & = & 3 \\ 2x+y-z & = & 1 \\ 3x-2y+z & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2-2E_1} \left\{\begin{array}{rcr} x-2y+2z & = & 3 \\ 5y-5z & = & -5 \\ 3x-2y+z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_3-3E_1} \begin{cases} x-2y+2z &= 3 \\ 5y-5z &= -5 \\ 4y-5z &= -7 \end{cases} \xrightarrow{\frac{1}{5}E_2} \begin{cases} x-2y+2z &= 3 \\ y-z &= -1 \\ 4y-5z &= -7 \end{cases} \xrightarrow{E_3-4E_2} \begin{cases} x-2y+2z &= 3 \\ y-z &= -1 \\ -z &= -3 \end{cases}$$

Sustituyendo $z=3 \Rightarrow y-3=-1 \Rightarrow y=2$, y por lo tanto, $x-2(2)+2(3)=3 \Rightarrow x=1$.
SCD: $S=\{(1,2,3)\}$

b.

$$\begin{cases} x+y+z &= 2 \\ 2x-2y-2z &= 2 \\ 4x &= 6 \end{cases} \longrightarrow x=\frac{3}{2} \xrightarrow{Sustituyendo} \begin{cases} \frac{3}{2}+y+z &= 2 \\ 3-2y-2z &= 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2E_1-E_2} \begin{cases} y+z &= \frac{1}{2} \\ 0 &= 0 \end{cases} \longrightarrow y=\frac{1}{2}-z.$$

SCI: $S=\{(x,y,z)|, x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}-z, z\in\mathbb{R}\} = \{(\frac{3}{2},\frac{1}{2}-z,z), z\in\mathbb{R}\}$

c.

$$\begin{cases} x-y-z &= 0 \\ x-2y-5z &= 2 \\ 3x-2y-4z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{E_2-E_1} \begin{cases} x-y-z &= 0 \\ y-4z &= 2 \\ 3x-2y-4z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{E_3-3E_1} \begin{cases} x-y-z &= 0 \\ -y-4z &= 2 \\ y-z &= 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3-E_2} \begin{cases} x-y-z &= 0 \\ -y-4z &= 2 \\ -5z &= 3 \end{cases} \longrightarrow z=-\frac{3}{5}$$

Sustituyendo en E_2 : $\quad z=-\dfrac{3}{5} \Rightarrow -y-4\left(\dfrac{-3}{5}\right)=2 \Rightarrow y=\dfrac{2}{5}$. Sustituyendo en E_1 : $\quad x-\dfrac{2}{5}-\dfrac{-3}{5}=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.

SCD: $S=\{(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},-\frac{3}{5})\}$

d.

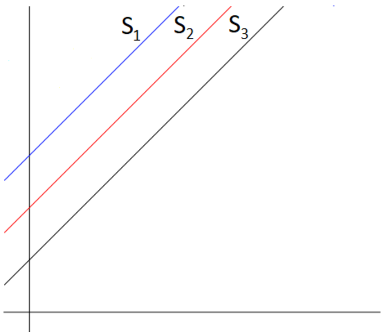
$$\begin{cases} 6x-9y+15z &= 3 \\ 8x-12y+20z &= 4 \\ -4x+6y-10z &= -2 \end{cases} \xrightarrow{E_2+2E_3} \begin{cases} 6x-9y+15z &= 3 \\ 8x-12y+20z &= 4 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-8E_1+6E_2} \begin{cases} 6x-9y+15z &= 3 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \longrightarrow x=\frac{1+3y-5z}{2}$$

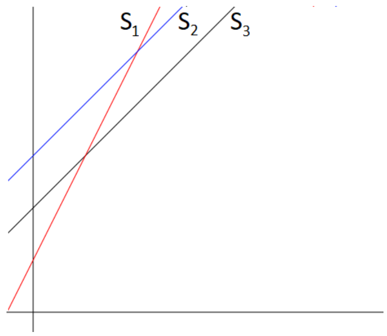
SCI: $S=\{(x,y,z)|, x=\frac{1+3y-5z}{2}, y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\} = \{(\frac{1+3y-5z}{2},y,z), y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\}$

Ejercicio 3.

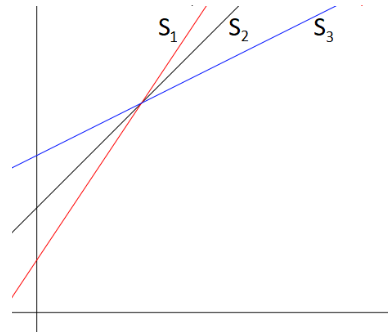
1. En las figuras siguientes se representa gráficamente las soluciones de distintas ecuaciones lineales pertenecientes a sistemas 3x2 (3 ecuaciones y 2 incognitas). Describir en cada caso la solución del sistema (en caso de que el sistema sea compatible, indicar gráficamente la solución)



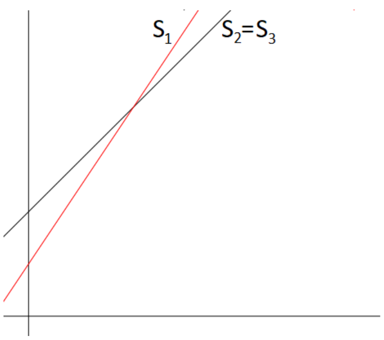
(a)



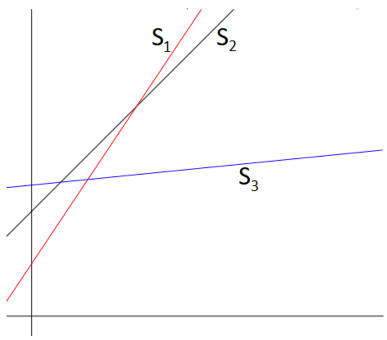
(b)



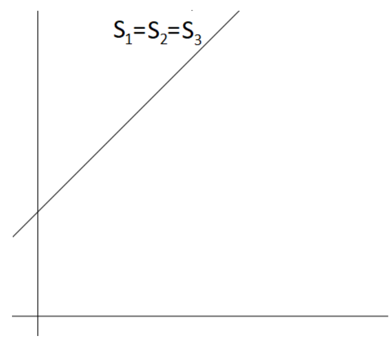
(c)



(d)



(e)

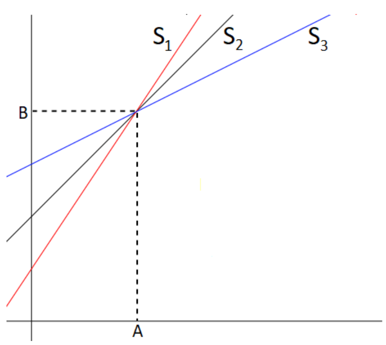


(f)

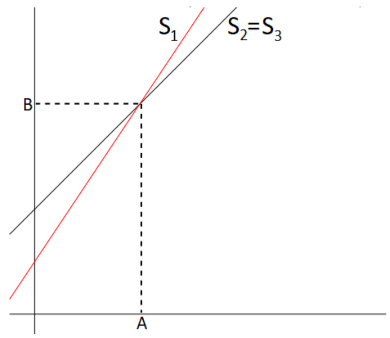
a) El sistema es incompatible $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing$

b) El sistema es incompatible $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing$

c) El sistema es compatible determinado $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{(A, B)\}$

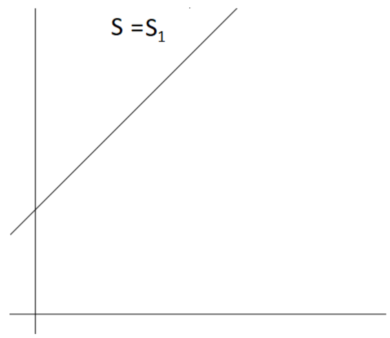


d) El sistema es compatible determinado $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{(A, B)\}$



e) El sistema es incompatible $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing$

f) El sistema es compatible indeterminado $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = S_1$. Todos los puntos de la recta son solución del sistema.



2. Considerese el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 60x - 2y & = & -200 \\ -90x + 3y & = & 150 \\ -217x + 7y & = & 35 \end{array} \right.$$

¿A cuál de los sistemas de la parte 1. se asemeja? Justificar.

El sistema formado por las primeras 2 ecuaciones es incompatible

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 60x - 2y & = & -200 \\ -90x + 3y & = & 150 \end{array} \right. \xrightarrow{E_2 + \frac{3}{2}E_1} \left\{ \begin{array}{rcr} 60x - 2y & = & -200 \\ 0 & = & -150 \end{array} \right.$$

Por otro lado, el sistema formado por la primer y tercer ecuacion es compatible determinado

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 60x - 2y & = & -200 \\ -217x + 7y & = & 35 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 95 \\ y & = & 2950 \end{array} \right.$$

Lo anterior implica que el sistema formado por la segunda y tercer ecuacion tambien es compatible determinado. Podemos verificar esto directamente resolviendo

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -90x + 3y & = & 150 \\ -217x + 7y & = & 35 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 45 \\ y & = & 1400 \end{array} \right.$$

En definitiva, el sistema 3x2 inicial es similar al caso b) de la parte 1.

Ejercicio 4.

1.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+5y+z &= 3 \\ 5x-3z &= 6 \end{cases} \xrightarrow{E_2-E_1} \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 4y &= 0 \\ 5x-3z &= 6 \end{cases} \xrightarrow[\frac{1}{4}E_2]{E_3-5E_1} \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ y &= 0 \\ -3z &= -9 \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema es SCD: $S = \left\{ \left(\frac{15}{8}, 0, \frac{9}{8} \right) \right\}$

2.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+y+z &= 3 \\ x-3z &= 6 \end{cases} \xrightarrow{E_2-E_1} \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 0 &= 0 \\ x-3z &= 6 \end{cases}$$

La ecuación E_2 del último sistema resulta es $0 = 0$ y por podemos descartarla.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x-3z &= 6 \end{cases} \longrightarrow x = 6+3z$$

Sustituyendo en $E_1 : (6+3z)+y+z = 3 \Rightarrow y = -3-4z$.
El conjunto solución del sistema es

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 6+3z, y = -3-4z, z \in \mathbb{R}\} = \{(6+3z, -3-4z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Por lo tanto, estamos ante un **sistema compatible indeterminado**.

3.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+ky+z &= 3 \\ kx-3z &= 6 \end{cases} \xrightarrow{E_1-E_2} \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ (1-k)y &= 0 \\ kx-3z &= 6 \end{cases} \longrightarrow (1-k)y = 0$$

Por lo tanto:

- Si $k = 1$ la ecuación E_2 del último sistema podemos descartarla y ya vimos que en este caso la solución es

  $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 6+3z, y = -3-4z, z \in \mathbb{R}\} = \{(6+3z, -3-4z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

- Si $k \neq 1 \Rightarrow y = 0$. Sustituyendo $y = 0$ en las ecuaciones 1 y 3 podemos seguir resolviendo el sistema:

  $$\begin{cases} x+z &= 3 \\ kx-3z &= 6 \end{cases} \xrightarrow{E_2-kE_1} \begin{cases} x+z &= 3 \\ -(3+k)z &= 6-3k \end{cases}$$

  Ahora nos enfrentamos a dos posibilidades:

a) Si $k = -3$, el **sistema es incompatible** ya que la segunda ecuación del último sistema $(0 = 15)$ tiene solución $\emptyset$.

b) Si $k \neq -3$, podemos despejar $z = \dfrac{3k-6}{3+k}$ del ultimo sistema y luego obtener x. En este caso el **sistema es compatible determinado** y tiene como solución:

$$S = \{(\frac{15}{3+k}, 0, \frac{3k-6}{3+k})\}$$

Ejercicio 5.

Definimos:

- x=kilos de cebada
- y=kilos de lúpulo tipo "cascade"
- z=kilos de lúpulo tipo "columbus"

El sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1.000 \\ 120x+160y+140z &=& 126.000 \\ x &=& 4(y+z) \end{array}\right. \xrightarrow{120E_1-E_2} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1.000 \\ -40y-20z &=& -6.000 \\ x-4y-4z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_1-E_3} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1.000 \\ -40y-20z &=& -6.000 \\ 5y+5z &=& 1.000 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2+8E_3} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1.000 \\ -40y-20z &=& -6.000 \\ 20z &=& 2.000 \end{array}\right. \Rightarrow z = 100$$

Sustituyendo en $E_2 \Rightarrow y = 100$ y en $E_1 \Rightarrow x = 800$. Para poder cumplir con los requerimientos necesitará comprar 800 kilos de cebada, 100 kilos de lúpulos tipo "cascade" y 100 kilos de lúpulos tipo "columbus".

SCD: $S = \{(800, 100, 100)\}$

Ejercicio 6.

Definimos:

- x=socios del equipo A
- y=socios del equipo B
- z=no socios

El sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 72.000 \\ x+8.420 &=& y \\ 2z &=& y \end{array}\right. \xrightarrow{E_1-E_2} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 72.000 \\ 2y+z &=& 80.420 \\ -y+2z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_2-2E_3}\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 72.000 \\ 2y+z & = & 80.420 \\ 5z & = & 80.420 \end{array}\right. \Rightarrow z=16.084$$

Sustituyendo en $E_2 \Rightarrow y = 32.168$ y en $E_1 \Rightarrow x = 23.748$. La cantidad de socios de A presentes en el estadio son 23.748, los socios de B son 32.168 y hay 16.084 espectadores que no son socios de ningún equipo.

SCD: $S = \{(23.748, 32.168, 16.084)\}$

Ejercicio 7.

Definimos:

- x=número de monedas de 1 peso
- y=número de monedas de 2 pesos
- z=número de monedas de 5 pesos

El sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y+z & = & x-4 \\ y & = & 0{,}4x+1 \\ 1+x+2y+5z & = & 50 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & -4 \\ -0{,}4x+y & = & 1 \\ x+2y+5z & = & 49 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{2E_1-5E_2}\left\{\begin{array}{rcr} -x+y+z & = & -4 \\ -3y+2z & = & -13 \\ x+2y+5z & = & 49 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1+E_3}\left\{\begin{array}{rcr} -x+y+z & = & -4 \\ -3y+2z & = & -13 \\ 3y+6z & = & 45 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_2+E_3}\left\{\begin{array}{rcr} -x+y+z & = & -4 \\ -3y+2z & = & -13 \\ 8z & = & 32 \end{array}\right. \longrightarrow z=4$$

Sustituyendo en $E_2 : -3y+2(4) = -13 \Rightarrow y = 7$ y luego en $E_1 : -x+7+4 = -4 \Rightarrow x = 15$. En la caja hay 15 monedas de 1 peso, 7 monedas de 2 pesos y 4 monedas de 5 pesos.

SCD: $S = \{(15, 7, 4)\}$

Ejercicio 8.

1. Sea:
    - x=Nº de votos de González
    - y=Nº de votos de López
    - z=Nº de votos de Pérez

$$\left\{\begin{array}{rcllc} x+y+z & = & 40000 & (1) & (1) \\ x-y-z & = & 10000 & (-1) & \\ x+y-7z & = & 0 & & (-1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 40000 \\ 2y+2z & = & 30000 \\ 8z & = & 40000 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z = 5.000$ sustituyendo en la ecuación 2: $y = 10.000$ y sustituyendo estos dos valores en la ecuación 1: $x = 25.000$.

2. - Nº de votos de González=25.000
   - Nº de votos de López=10.000
   - Nº de votos de Pérez=5.000

Ejercicio 9.

Sea:

- x el precio del café
- y el precio del cortado
- z el precio del café

$$\left\{\begin{array}{rcllc} 2x+2y+z & = & 300 & (-1) & (-2) \\ x+y+3z & = & 325 & (2) & \\ x+2y+z & = & 245 & & (1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+2z & = & 300 \\ 5z & = & 350 \Rightarrow z = 70 \\ 2y+z & = & 190 \end{array}\right.$$

Sustituyendo en las dos ecuaciones que nos quedan del sistema obtenemos:

$$\Rightarrow 2y + 70 = 90 \Rightarrow y = 60$$
$$\Rightarrow 2x + 2(60) + 2(70) = 300 \Rightarrow x = 55$$

Por lo tanto, la solución es única (el sistema es compatible y determinado) y es:

$$S = \{(55, 60, 70)\}$$

El café cuesta 55 pesos, el cortado 60 y el café con leche 70.

Ejercicio 10.

A. Sea:

   - x=peso del pack de leche (en kg)
   - y=peso del pack de galletas (en kg)
   - z=peso del pack de corned beef (en kg)

Las restricciones de carga se pueden expresar en términos de las variables x, y, z mediante un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y-z &=& 40 \\ 3x-3y+6z &=& 30 \\ -2y+3z &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y-z &=& 40 \\ 18y-27z &=& 0 \\ -2y+3z &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y-z &=& 40 \\ 18y-27z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right.$$

Sistema compatible indeterminado: $S = \{(x,y,z)|, x = 10 - \frac{1}{2}z, y = \frac{3}{2}z, z \in \mathbb{R}\} = \{(10 - \frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Tres soluciones posibles al problema son:

Solución 1: $z = 2 \Rightarrow x = 9, y = 3; (x,y,z) = (9,3,2)$ El pack de leche contendría 9 envases, el pack de galletas contendría 3 envases y el pack de corned beef contendría 2 envases.

Solución 2: $z = 4 \Rightarrow x = 8, y = 6; (x,y,z) = (8,6,4)$ El pack de leche contendría 8 envases, el pack de galletas contendría 6 envases y el pack de corned beef contendría 4 envases.

Solución 3: $z = 6 \Rightarrow x = 7, y = 9; (x,y,z) = (7,9,6)$ El pack de leche contendría 7 envases, el pack de galletas contendría 9 envases y el pack de corned beef contendría 6 envases.

B. El sistema de ecuaciones correspondiente a la nueva restricción es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y-z &=& 40 \\ 3x-3y+6z &=& 30 \\ -2y+3z &=& 20 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y-z &=& 40 \\ 18y-27z &=& 0 \\ -2y+3z &=& 20 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 4x+2y-z &=& 40 \\ 18y-27z &=& 0 \\ 0 &=& 180 \end{array}\right.$$

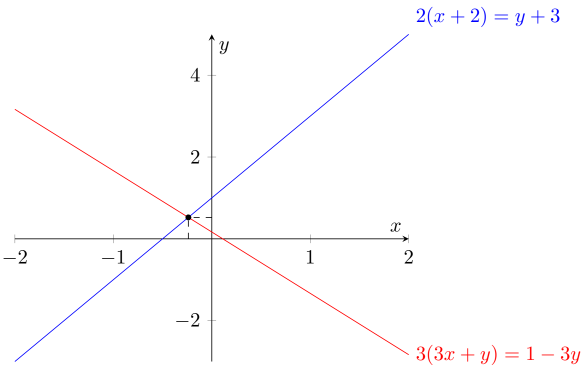
Sistema incompatible: Esta alternativa es peor que la A, pues no puede distribuirse de esta manera.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.

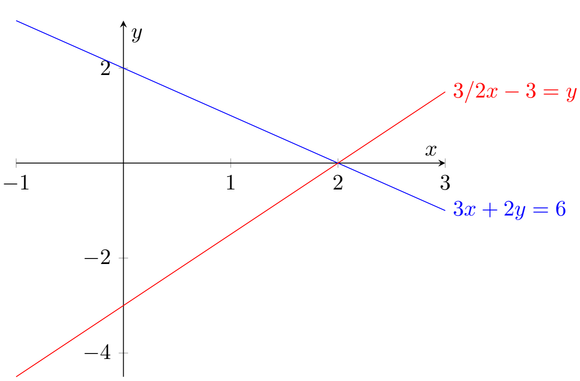
a.
$$\left\{\begin{array}{lcl} 2(x+2) & = & y+3 \\ 3(3x+y) & = & 1-3y \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{lcl} 2x-y & = & -1 \\ 9x+6y & = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{9E_1-2E_2} \left\{\begin{array}{lcl} 2x-y & = & -1 \\ -21y & = & -11 \end{array}\right.$$
$\Rightarrow y = \dfrac{11}{21}$ sustituyendo en la ecuación 1: $2x = -1 + \dfrac{11}{21} \Rightarrow x = -\frac{5}{21}$.

SCD: $S = \{(-\frac{5}{21}, \frac{11}{21})\}$



b.
$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y & = & 6 \\ 3/2x-3 & = & y \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y & = & 6 \\ 3/2x-y & = & 3 \end{array}\right. \xrightarrow{1/2E_1-E_2} \left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y & = & 6 \\ 2y & = & 0 \end{array}\right.$$
$\Rightarrow y = 0$ sustituyendo en la ecuación 1: $3x = 6 \Rightarrow x = 2$.

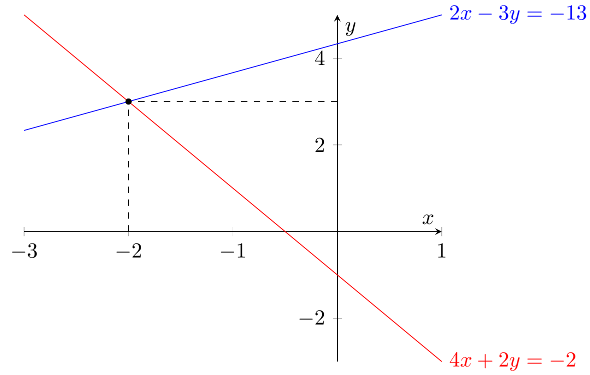
SCD: $S = \{(2,0)\}$



c.
$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & -13 \\ 4x+2y & = & -2 \end{array}\right. \overset{2E_1-E_2}{=\!\!\longrightarrow} \left\{\begin{array}{lcl} 2x-3y & = & -13 \\ -8y & = & -24 \end{array}\right.$$

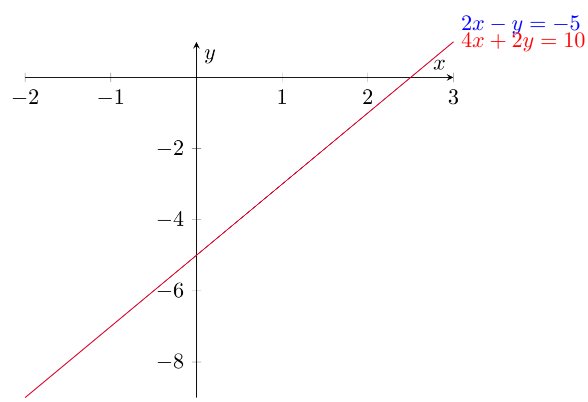
$\Rightarrow y = 3$ sustituyendo en la ecuación 1: $2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

SCD: $S = \{(-2, 3)\}$



d.
$$\begin{cases} 4x - 2y &= 10 \\ -2x + y &= -5 \end{cases} \xrightarrow{E_1 + 2E_2} \begin{cases} 4x - 2y &= 10 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow 4x - 2y = 10 \Rightarrow y = 2x - 5 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

SCI: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}, y = 2x - 5\} = \{(x, 2x - 5), x \in \mathbb{R}\}$



Ejercicio 2.

a.

$$\begin{cases} -2x + y + 3z &= 10 \\ 10x - 5y - 15z &= 30 \\ x + y - 3z &= 25 \end{cases} \xrightarrow{Reordenando} \begin{cases} x + y - 3z &= 25 \\ -2x + y + 3z &= 10 \\ 10x - 5y - 15z &= 30 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2E_1+E_2}\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z &=& 25\\ 3y-3z &=& 60\\ 10x-5y-15z &=& 30\end{array}\right. \xrightarrow{10E_1-E_3}\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z &=& 25\\ 3y-3z &=& 60\\ 15y-15z &=& 220\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{-5E_2+E_3}\left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z &=& 25\\ 3y-3z &=& 60\\ 0 &=& -80\end{array}\right.$$

Por lo tanto, el sistema es incompatible.

b.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 0\\ 3x-y+2z &=& -1\\ x+2y+3z &=& -5\end{array}\right. \xrightarrow{E_2-3E_1}\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ -4y-z &=& -1\\ x+2y+3z &=& -5\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_3-E_1}\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 0\\ -4y-z &=& -1\\ -y-2z &=& 5\end{array}\right. \xrightarrow{4E_3+E_2}\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ -4y-z &=& -1\\ 7z &=& -21\end{array}\right. \Rightarrow z=-3$$

Sustituyendo en $E_2 \Rightarrow y=1$ y luego en $E_1 \Rightarrow x=2$.

SCD: $S=\{(2,1,-3)\}$

c.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y &=& z+1\\ 3x &=& 2(y+z)\\ 3(x+z) &=& 4(y+1)\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl|l} x+2y-z &=& 1 & \\ 3x-2y-2z &=& 0 & E_2-3E_1\\ 3x-4y+3z &=& 4 & E_3-3E_1\end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl|l} x+2y-z &=& 1 & \\ -8y+z &=& -3 & \\ -10y+6z &=& 1 & E_3-\frac{10}{8}E_2\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 1\\ -8y+z &=& -3\\ \frac{19}{4}z &=& \frac{19}{4}\end{array}\right. \Rightarrow z=1$$

Sustituyendo en $E_2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ y luego en $E_1 \Rightarrow x=1$.

SCD: $S=\{(1,1/2,1)\}$

d.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3(x+z) &=& 1-y\\ 2(y-z) &=& 3-x\\ 6x+2y+6z &=& -1\end{array}\right. \xrightarrow{Reordenando}\left\{\begin{array}{lcl|l} x+2y-2z &=& 3 & \\ 3x+y+3z &=& 1 & -3E_1+E_2\\ 6x+2y+6z &=& -1 & -6E_1-E_3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl|l} x+2y-2z &=& 3 & \\ -5y+9z &=& -8 & \\ 10y-18z &=& 19 & 2E_2+E_3\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+2y-2z &=& 3\\ -5y+9z &=& -8\\ 0 &=& 3\end{array}\right.$$

Como el conjunto solución de la última ecuación vacío, concluimos que el sistema es incompatible.

Ejercicio 3.

1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-3y+z &=& 1\\ x+y+z &=& 5\\ 3x+y+z &=& 4 \end{array}\right. \underset{E_3-E_1}{\xrightarrow{E_2-E_1}} \left\{\begin{array}{rcl} x-3y+z &=& 1\\ 4y &=& 4\\ 10y-2z &=& 1 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-3y+z &=& 1\\ 10y-2z &=& 1\\ 4y &=& 4 \end{array}\right.$$

De la última ecuación obtenemos $y=1$ y sustituyendo en las anteriores concluimos que el sistema es compatible determinado y su solución es $S=\left\{\left(\frac{-1}{2},1,\frac{9}{2}\right)\right\}$

2.
$$\left\{\begin{array}{rcl} x-ky+z &=& 1\\ x+y+z &=& k+2\\ kx+y+z &=& 4 \end{array}\right.$$

Por comodidad, reordenamos lo términos dentro de las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} z-ky+x &=& 1\\ z+y+x &=& k+2\\ z+y+kx &=& 4 \end{array}\right. \xrightarrow{E_2-E_1} \left\{\begin{array}{rcl} z-ky+x &=& 1\\ (1+k)y &=& k+1\\ z+y+kx &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_3-E_1} \left\{\begin{array}{rcl} z-ky+x &=& 1\\ (1+k)y &=& k+1\\ (1+k)y+(k-1)x &=& 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z-ky+x &=& 1\\ (1+k)y+(k-1)x &=& 3\\ (1+k)y &=& k+1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_2-E_3} \left\{\begin{array}{rcl} z-ky+x &=& 1\\ (k-1)x &=& 2-k \quad (*)\\ (1+k)y &=& k+1 \end{array}\right.$$

- Si $k=1$ tenemos que E_2 en el último sistema es $0=1$, por lo tanto el **sistema es incompatible**.
- Si $k=-1$ tenemos que E_3 en el último sistema es $0=0$, por lo tanto podemos descartarla.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z+y+x &=& 1\\ -2x &=& 3 \end{array}\right. \xrightarrow{-\frac{1}{2}E_2} \left\{\begin{array}{rcl} z+y+x &=& 1\\ x &=& -\frac{3}{2} \end{array}\right. \to z=\frac{5}{2}-y$$

El conjunto solución resulta ser

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=-\frac{3}{2},y\in\mathbb{R},z=\frac{5}{2}-y\}$$

En este caso tenemos que **el sistema es compatible indeterminado**.

- Si $k \neq -1$ y $k \neq 1$, entonces podemos despejar las coordenadas x e y en el sistema $(*)$
  $x = \frac{2-k}{k-1}$ $y = \frac{k+1}{k+1} = 1$ y luego obtenemos la coordenada $z = \frac{k^2+k-3}{k-1}$. En resumen

  $$S + \{(\frac{2-k}{k-1}), 1, \frac{k^2+k-3}{k-1}\}$$

  y el sistema **es compatible determinado**.

Ejercicio 4.

Definimos:

- x=precio del celular
- y=precio del Xbox
- z=precio del viaje a Buenos Aires

El sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1372 \\ x & = & y+z+140 \\ x+1{,}5z+208 & = & 1372 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1-E_2} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1372 \\ 2y+2z & = & 1232 \\ x+1{,}5z & = & 1164 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_1-E_3} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1372 \\ 2y+2z & = & 1232 \\ y-0{,}5z & = & 208 \end{array}\right. \xrightarrow{2E_3-E_2} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1372 \\ 2y+2z & = & 1232 \\ -3z & = & -816 \end{array}\right. \Rightarrow z = 272$$

Sustituyendo en $E_2 \Rightarrow y = 344$ y luego en $E_1 \Rightarrow x = 756$. El precio del celular es de 756 dólares, el del Xbox es 344 dólares y el del viaje a Buenos Aires es 272 dólares.

SCD: $S = \{(756, 344, 272)\}$

Ejercicio 5.

Definimos:

- x=cantidad de individuos a favor
- y=cantidad de individuos en contra
- z=cantidad de individuos que no opinan

El sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2(y+z) \\ x+y+z & = & 360 \\ (x+y)-z & = & 2(x-y) \end{array}\right. \xrightarrow{Reordenando} \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 360 \\ x-2y-2z & = & 0 \\ -x+3y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{E_1-E_2}\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 360 \\ 3y+3z & = & 360 \\ -x+3y-z & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1-E_3}\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 360 \\ 3y+3z & = & 360 \\ 4y & = & 360 \end{array}\right. \Rightarrow y=90$$

Sustituyendo en $E_2 \Rightarrow z = 30$ y luego en $E_1 \Rightarrow x = 240$. La cantidad de individuos a favor de la prohibición es 240, 90 están en contra y 30 no opinaron.

SCD: $S = \{(240, 90, 30)\}$

Ejercicio 6.

1. Sea:

   - x=N° de personas entre 0 y 17 años en Artigas
   - y=N° de personas entre 0 y 17 años en Rivera
   - z=N° de personas entre 0 y 17 años en Tacuarembó

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 16927 \\ x+y-z & = & 8797 \\ -x+y+z & = & 6713 \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 16927 \\ x+y-z & = & 8797 \\ -x+y+z & = & 6713 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1-E_2/E_1+E_3}\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 16927 \\ 2z & = & 8130 \\ 2y+2z & = & 23640 \end{array}\right. \Rightarrow z=\frac{8130}{2}=4065$$

Sustituyendo en la $E_3 \Rightarrow y = \dfrac{15510}{2} = 7755$ y luego en la $E_1 \Rightarrow x = 5107$.

   - N° de personas entre 0 y 17 años en Artigas $= 5.107$
   - N° de personas entre 0 y 17 años en Rivera $= 7.755$
   - N° de personas entre 0 y 17 años en Tacuarembó $= 4.065$

Ejercicio 7.

1. Clasificar y resolver el siguiente sistema 3×3 y discutir su solución según los valores del parámetro k

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ kx-y & = & 1 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ kx-y & = & 1 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array}\right. \overrightarrow{E_3-E_1}\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ kx-y & = & 1 \\ y & = & -2 \end{array}\right.$$

de la ultima ecuación obtenemos $y = -2$ y por lo tanto el sistema queda

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 5 \\ kx & = & -1 \end{array}\right.$$

- Caso $k \neq 0$: de la última ecuación obtenemos $x = \frac{-1}{k}$ y de la primera $z = 5 + \frac{1}{k}$. En resumen, el sistema es compatible determinado y su solucion es la terna $(x, y, z) = (\frac{-1}{k}, -2, 5 + \frac{1}{k})$
- Caso $k = 0$: el sistema resulta

$$\begin{cases} x + z & = & 5 \\ 0 & = & -1 \end{cases}$$

el cual es incompatible.