Práctico Nº2: Matrices

Matemática 2 - FCS - UDELAR

2024

Ejercicio 1.

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + \gamma & 1 - \alpha \\ 2 + \gamma & 6\alpha - 6\beta - 10 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta & \beta + \gamma \\ 2\beta & -3\alpha - 9\gamma - 6 \end{pmatrix}$$

donde: $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Determinar para qué valores de α, β y γ las matrices A y B son iguales.

Ejercicio 2.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

1. $(A + B)$
2. $(A - B)$
3. $A.B$
4. $B.A$
5. A^t

Ejercicio 3.

Hallar la inversa (si existe) de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

Comprobar que si A es una matriz invertible de 2×2 de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, su matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Lo que se ha planteado es una regla para hallar inversas de matrices de 2×2. Aplicarla para hallar la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcular: $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A+B)$, $\det(A-B)$, $\det(AB)$.
2. Calcular: $\det(C)$, $\det(C^t)$, $\det(5C)$.

Ejercicio 6.

Dadas las matrices:

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación matricial $AX = B$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolver la ecuación matricial $XA + B = C$

Ejercicio 7.

Un país americano exporta al año 500 unidades de bienes agrícolas y 700 unidades de bienes manufacturados, mientras que otro país asiático exporta al año 1.000 unidades de bienes agrícolas y 300 unidades de bienes manufacturados.

Se pide:

1. Ordene los datos anteriores en una matriz, tal que las filas contenga a los países y las columnas a los tipos de bienes, que denominaremos matriz A.
2. Calcule A^{-1}.
3. Sea A la matriz definida anteriormente. Sean X y b dos matrices, donde X es una matriz de incógnitas y b es una matriz que registra las exportaciones del país americano y del asiático:
$$b = \begin{pmatrix} 190000 \\ 160000 \end{pmatrix}$$
Resuelva la siguiente ecuación matricial: $AX = b$
4. Interprete qué representa la matriz X.

Ejercicio 8. Admisión en la Universidad (tomado de Budnick, p. 216).

La oficina de inscripciones de una gran universidad planea admitir a 7.500 alumnos en el próximo año. El vector columna M indica la distribución esperada de los nuevos estudiantes en las categorías de varones residentes en el estado (VRE), mujeres residentes en el estado (MRE), varones residentes fuera del estado (VRF) y mujeres residentes fuera del estado (MRF):

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3000 \\ 2750 \\ 1000 \\ 750 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} VRE \\ MRE \\ VRF \\ MRF \end{array}$$

El personal de admisión espera que los estudiantes seleccionen su carrera en las escuelas de administración (A), ingeniería (I) y artes y ciencias (AyC) de acuerdo con los porcentajes dados en la matriz P:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} VRE & MRE & VRF & MRF \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}24 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}06 \\ 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}70 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ I \\ AyC \end{array}$$

Se pide: Con las operaciones matriciales calcule el número de estudiantes que, según las previsiones, ingresarán a cada escuela.

Ejercicio 9. La entidad recaudadora de impuestos de cierto país clasifica las empresas nacionales de acuerdo a la ubicación geográfica de su sede (norte, centro, sur) y al rubro de su actividad económica (servicios, manufactura, agropecuario).

A. La distribución histórica de rubros por región se puede expresar en la siguiente matriz A:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Norte & Centro & Sur \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}10 & 0{,}60 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}30 \\ 0{,}30 & 0{,}80 & 0{,}10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Ser \\ Man \\ Agr \end{array}$$

Se sabe que en el primer semestre de 2022 se registraron 200 nuevas empresas en el norte, 150 nuevas empresas en el centro y 100 nuevas empresas en el sur, información que se resume en la matriz B:

$$B_{Primer\ semestre} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Se pide:

A.1 Estimar la cantidad aproximada de nuevas empresas en cada uno de los rubros de actividad económica.

A.2 Expresar cómo puede obtenerse el resultado previo operando con las matrices anteriores.

B. Un virus en el sistema informático de la entidad recaudadora genera una pérdida de los datos de ubicación geográfica de las empresas inscritas en el segundo semestre de 2023. Es decir, no se conoce la matriz correspondiente B:

$$B_{Segundo\ semestre} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sí se logró recuperar los datos de total por rubro (Ser 158, Man 74, Agr 158).

Se pide: ¿Es posible estimar los datos del total de empresas nuevas por zona? En caso de ser posible, estimarlos.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular:

1. $(A + B)^2$
2. $(A - B)^2$
3. B^t
4. $A.B^t.C$

Ejercicio 2.

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resolver las siguientes ecuaciones en la matriz X:

1. $A + X = B$
2. $A – B = X$
3. $3A + 4X = 5A$
4. $AB = X$
5. $AX = B$
6. $XA = B$
7. $AX = I$

Ejercicio 3.

1. Encontrar dos matrices $B \neq 0$ (de dimensión 2×2) tal que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} .B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Encontrar **todas** las matrices $B \neq 0$ (de dimensión 2×2) que verifican la ecuación anterior.

Ejercicio 4. Se dispone de datos sobre las exportaciones e importaciones por habitante de Uruguay para los años 1880 y 1900. Estos datos (expresados en pesos constantes de 1900 por habitante) se organizan en la matriz A, de la siguiente manera: en la primera fila se registran las exportaciones por habitante y en la segunda fila las importaciones por habitante. Cada una de las columnas contiene los datos correspondientes a 1880 y 1900, en ese orden.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 30 \\ 44 & 26 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Determinar el valor del coeficiente a_{11} sabiendo que $\det(A) = -150$.

2. Interpretar el coeficiente a_{21}.

3. Hallar la matriz inversa de A. Expresar los resultados con dos dígitos decimales. Si no pudo resolver la parte 1. del ejercicio, elija un valor de a_{11} para el cual exista la matriz inversa de A.

4. Utilizando la matriz inversa de A resolver la siguiente ecuación matricial:

$$A.X = \begin{pmatrix} 47.000.000 \\ 42.000.000 \end{pmatrix}$$

   donde 47.000.000 es la suma de las exportaciones de los años 1880 y 1900; 42.000.000 es la suma de las importaciones de 1880 y 1900. Interpretar los coeficientes de la matriz X.

Ejercicio 5. Las matrices P_{2000} y P_{2010} contienen la población total de Uruguay (en miles) por sexo según tres regiones para los años 2000 y 2010, respectivamente. La primer columna contiene la población residente en Montevideo (M), la segunda columna contiene la población residente al Norte del Río Negro (N) y la tercer columna la población residente al Sur del Río Negro (S), excluido Montevideo. Por otra parte, la primer fila representa la población de mujeres (Mu) y la segunda fila la población de hombres (Ho).

$$P_{2000} = \begin{pmatrix} 743 & 289 & 694 \\ 653 & 286 & 684 \end{pmatrix} \qquad P_{2010} = \begin{pmatrix} 729 & 292 & 735 \\ 642 & 285 & 714 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcule $P_{2010} - P_{2000}$. ¿Cómo se interpreta este resultado?

2. El Instituto de Estadística había proyectado que la población se incrementaría un 2 % entre el año 2000 y 2010, para ambos sexos y las 3 regiones. Calcule la diferencia entre la población proyectada y los niveles observados para el año 2010. ¿Cuáles son las proyecciones que resultaron superiores a los datos observados?

3. Escriba la matriz del año 2010 como una matriz de 2×2 donde las filas continúan siendo el sexo de las personas, pero las columnas son: Montevideo la primer columna e Interior del país la segunda columna.

4. Sabiendo que la población proyectada para Uruguay (en miles) para el año 2020 es 1.812 mujeres y 1.694 hombres, calcule e interprete cuáles son las tasas de crecimiento respecto al año 2010 previstas para el conjunto de la población de Montevideo y para el conjunto de la población del Interior del país. Ayuda: recuerde que es posible expresar las proyecciones del año 2020 como un vector columna que le permitirá solucionar el sistema. Cuando calcule la inversa, deje 4 números después de la coma.