Solución Práctico N$^{\underline{o}}$2: Matrices

Matemática 2 - FCS - UDELAR

2024

Ejercicio 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta+\gamma & 1-\alpha \\ 2+\gamma & 6\alpha-6\beta-10 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} \alpha+3\beta & \beta+\gamma \\ 2\beta & -3\alpha-9\gamma-6 \end{pmatrix}$$

$A = B$ si y sólo si son iguales si cada elemento de A es igual al elemento de B que ocupa su misma posición. Entonces,

$$\begin{array}{lrcl} (i) & 2\alpha+\beta+\gamma & = & \alpha+3\beta \\ (ii) & 1-\alpha & = & \beta+\gamma \\ (iii) & 2+\gamma & = & 2\beta \\ (iv) & 6\alpha-6\beta-10 & = & -3\alpha-9\gamma-6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lrcl} (i) & \alpha-2\beta+\gamma & = & 0 \\ (ii) & -\alpha-\beta-\gamma & = & -1 \\ (iii) & -2\beta+\gamma & = & -2 \\ (iv) & 9\alpha-6\beta+9\gamma & = & 4 \end{array}$$

Entonces por el método de escalerización:

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 9 & -6 & 9 \end{array}\right) \left| \begin{array}{r} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \left| \begin{array}{rl} 0 & \\ -1 & \Rightarrow F_1+F_2 \\ -2 & \\ 4 & \Rightarrow 9F_1-F_4 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left| \begin{array}{rl} 0 & \\ -1 & \\ 4 & \Rightarrow 2F_2-3F_3 \\ 0 & \Rightarrow 4F_2-F_4 \end{array} \right. \Rightarrow \gamma = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \beta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \alpha - 2\frac{1}{3} - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{6}{3} = 2$$

$\alpha = 2, \beta = 1/3, \gamma = -4/3$

Ejercicio 2.

1.

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} (A.B) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2.1+0.0+1.1) & (2.0+0.2+1.1) & (2.1+0.1+1.0) \\ (3.1+0.1+0.1) & (3.0+0.2+0.1) & (3.1+0.1+0.0) \\ (5.1+1.1+1.1) & (5.0+1.2+1.1) & (5.1+1.1+1.0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (B.A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1.2+0.3+1.5) & (1.0+0.0+1.1) & (1.1+0.0+1.1) \\ (1.2+2.3+1.5) & (1.0+2.0+1.1) & (1.1+2.0+1.1) \\ (1.2+1.3+0.5) & (1.0+1.0+0.1) & (1.1+1.0+0.1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3.

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow F_2 - F_1 \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow F_3 + F_2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow F_2 - F_3 \quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow F_1 + F_2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow -F_2 \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow F_3 - 2F_1 \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\Rightarrow F_1 + F_2\\ \\ \Rightarrow F_3 - 2F_2\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 5 & -2\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\Rightarrow F_2 - 3F_1\\ \Rightarrow F_3 - F_1\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\Rightarrow -F_2\\ \Rightarrow -F_3\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix}\Rightarrow F_1 + F_3\\ \Rightarrow F_2 + F_3\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow F_1 + 2F_2$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix}-6 & 2 & 1\\ 4 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix}-6 & 2 & 1\\ 4 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \begin{matrix} \\ \Rightarrow 3F_2 - F_1 \\ \Rightarrow 3F_3 - 2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -11 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow 5F_2 - 4F_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & -12 \end{pmatrix} \right. \begin{matrix} \Rightarrow 3F_1 + 5F_3 \\ \Rightarrow 3F_2 - 11F_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 18 & 75 & -60 \\ -30 & -156 & 132 \\ 3 & 15 & -12 \end{pmatrix} \right. \begin{matrix} \Rightarrow F_1 + F_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -18 & -81 & 72 \\ -36 & -156 & 132 \\ 3 & 15 & -12 \end{pmatrix} \right. \begin{matrix} \Rightarrow \frac{F_1}{9} \\ \Rightarrow -\frac{F_2}{12} \\ \Rightarrow -\frac{F_3}{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -2 & -9 & 8 \\ 3 & 13 & -11 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 8 \\ 3 & 13 & -11 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

Para ser la matriz inversa de A, la matriz A^{-1} debe cumplir que:

- $A.A^{-1} = I$
- $A^{-1}.A = I$

donde I es la Identidad de 2,2.

Si calculamos el pimer producto (con uno solo de éstos basta):

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \Rightarrow aF_2 - bF_1$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ ab - ab & ad - bc \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix} \right. \Rightarrow (ad - bc)F_1 - cF_2$$

$$\begin{pmatrix} [a(ad - bc)] & [c(ad - bc) - c(ad - bc)] \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} [(ad - bc) + cb] & -ac \\ -b & a \end{pmatrix} \right. \begin{matrix} \Rightarrow \dfrac{1}{a(ad - cb)} \\ \Rightarrow \dfrac{1}{(ad - cb)} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \dfrac{d}{(ad - cb)} & \dfrac{-c}{(ad - cb)} \\ \dfrac{-b}{(ad - cb)} & \dfrac{a}{(ad - cb)} \end{pmatrix} \right.$$

Podemos concluir que:

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad - cb)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

En el caso concreto de la matriz del ejercicio:

$$A^{-1} = \frac{1}{4.2-3.2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.

1.

$$\det(A) = |A| = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1.3-(-1).2 = 5$$
$$\det(B) = |B| = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 0.(-3)-2.1 = -2$$
$$\det(A+B) = |A+B| = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1.0-1.3 = -3$$
$$\det(A-B) = |A-B| = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 1.6-(-3).1 = 9$$
$$\det(A.B) = |A.B| = \det\begin{pmatrix} (1.0+(-1).1) & (1.2+(-1).(-3)) \\ (2.0+3.1) & (2.2+3.(-3)) \end{pmatrix} =$$
$$\det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = (-1).(-5)-5.3 = -10$$

2.
$$\det(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1(1(2)-2(-1))-0(0(2)-2(2))+(-1)(0(-1)-1(2)) = 6$$

3. $\det(5C) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & -5 \\ -5 & 10 & 10 \end{pmatrix} = 5(5(10)-10(-5))-0(0(10)-10(10))+(-5)(0(-5)-5(10)) = 750$

Ejercicio 6.

a.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{2.2-3.1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (2.3-3.2) & (2.1-3.(-5)) \\ (-1.3+2.2) & (-1.1+2.(-5)) \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{aligned}
&XA + B = C \Rightarrow XA = C - B \Rightarrow XAA^{-1} = (C - B)A^{-1} \\
&\Rightarrow X = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} . \frac{1}{(1.2 - 1.1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1.2 + 1.(-1)) & (-1.(-1) + 1.1) \\ (1.2 - 2.(-1)) & (1.(-1) - 2.1) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.

1. $A = \begin{pmatrix} 500 & 700 \\ 1000 & 300 \end{pmatrix}$
   Donde la primer fila es América y la segunda Asia; y la primer columna es agricultura y la segunda productos manufacturados.

2. Utilizando la fórmula de matriz inversa del ejercicio 4, tenemos que:
   $A^{-1} = -\frac{1}{550000} \begin{pmatrix} 300 & -700 \\ -1000 & 500 \end{pmatrix}$

3. Para resolver la ecuación matricial $AX = b$ premultiplicamos por A^{-1} a cada lado, obteniendo: $A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$

$$\begin{aligned}
X &= -\frac{1}{550000} \begin{pmatrix} 300 & -700 \\ -1000 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190000 \\ 160000 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{550000} \begin{pmatrix} 300.190000 + (-700).160000 \\ -1000.190000 + 500.160000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. X representa los precios de los bienes agrícolas y de los bienes manufacturados: 100 representa el precio de los bienes agrícolas y 200 el precio de los bienes manufacturados.

Ejercicio 8.

$$P.M = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3000 \\ 2750 \\ 1000 \\ 750 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}24 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}06 \\ 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}70 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}30.3000 + 0{,}30.2750 + 0{,}30.1000 + 0{,}24.750 \\ 0{,}20.3000 + 0{,}10.2750 + 0{,}30.1000 + 0{,}06.750 \\ 0{,}50.3000 + 0{,}60.2750 + 0{,}40.1000 + 0{,}70.750 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P.M = \begin{pmatrix} 2205 \\ 1220 \\ 4075 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.

A.1 N$^{\underline{o}}$ aproximado de nuevas empresas en:

Servicios	$0{,}5(200) + 0{,}1(150) + 0{,}6(100) = 175$
Manufacturero	$0{,}2(200) + 0{,}1(150) + 0{,}3(100) = 85$
Agrícola	$0{,}3(200) + 0{,}8(150) + 0{,}1(100) = 190$

A.2 Calculando: A.B.

B. A partir de los datos disponibles, puede plantearse la siguiente ecuación:

$$A.B_{\text{Segundo semestre}} = \begin{pmatrix} 158 \\ 74 \\ 158 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial anterior equivale a resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales (y responder así la pregunta):

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}1y + 0{,}6z &= 158 \\ 0{,}2x + 0{,}1y + 0{,}3z &= 74 \\ 0{,}3x + 0{,}8y + 0{,}1z &= 158 \end{cases}$$

Escalerizando el sistema, se concluye que su única solución es:

$$B_{\text{Segundo semestre}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 110 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Observación: otra manera de resolver el problema es trabajando completamente con matrices.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 23/3 & -47/3 & 1 \\ -7/3 & 13/3 & 1 \\ -13/3 & 37/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Pre-multiplicando por A^{-1} en la ecuación inicial se obtiene:

$$A^{-1}.A.B_{\text{Segundo semestre}} = A^{-1} \begin{pmatrix} 158 \\ 74 \\ 158 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{\text{Segundo semestre}} = \begin{pmatrix} 210 \\ 110 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.

1.

$$(A+B)^2 = \left(\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 8\end{pmatrix}^2$$

$$(A+B)^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 8\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4.4-2.2+4.3 & 4.(-2)-2.1+4.(-1) & 4.4-2.3+4.8\\ 2.4+1.2+3.3 & 2.(-2)+1.1+3.(-1) & 2.4+1.3+3.8\\ 3.4-1.2+8.3 & 3.(-2)-1.1+8.(-1) & 3.4-1.3+8.8\end{pmatrix}\end{array}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix}24 & -14 & 42\\ 19 & -6 & 35\\ 34 & -15 & 73\end{pmatrix}$$

2.

$$(A-B)^2 = \left(\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ -4 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}^2$$

$$(A-B)^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ -4 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ -4 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-4.(-4)+0.(-4)+0.3 & -4.0+0.1+0.1 & -4.0+0.(-1)+0.0\\ -4.(-4)+1.(-4)-1.3 & -4.0+1.1-1.1 & -4.0+1.(-1)-1.0\\ 3.(-4)+1.(-4)+0.3 & 3.0+1.1+0.1 & 3.0+1.(-1)+0.0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$(A-B)^2 = \begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 9 & 0 & -1\\ -16 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

3. $B^t = \begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

4.

$$A.B^t.C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} .C$$

$$A.B^t = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0(4)-1(-1)+2(2) & 0(3)-1(0)+2(2) & 0(0)-1(-1)+2(4) \\ -1(4)+1(-1)+1(2) & -1(3)+1(0)+1(2) & -1(0)+1(-1)+1(4) \\ 3(4)+0(-1)+4(2) & 3(3)+0(0)+4(2) & 3(0)+0(-1)+2(4) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A.B^t = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 3 \\ 20 & 17 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A.B^t.C = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 3 \\ 20 & 17 & 16 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5(0)+4(-2)+9(4) & 5(1)+4(0)+9(2) & 5(-1)+4(3)+9(1) \\ -3(0)-1(-2)+3(4) & -3(1)-1(0)+3(2) & -3(-1)-1(3)+3(1) \\ 20(0)+17(-2)+16(4) & 20(1)+17(0)+16(2) & 20(-1)+17(3)+16(1) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A.B^t.C = \begin{pmatrix} 28 & 23 & 16 \\ 14 & 3 & 3 \\ 30 & 52 & 47 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

1. $A + X = B \Rightarrow X = B - A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

2. $A–B = X \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $3A + 4X = 5A \Rightarrow 4X = 5A - 3A \Rightarrow 4X = 2A \Rightarrow X = \dfrac{1}{2}A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. $AB = X \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1(-1)+2(2) & 1(1)+2(0) \\ 3(-1)+4(2) & 3(1)+4(0) \end{pmatrix} \end{array}$

   $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

5. $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \dfrac{1}{1(4)-2(3)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2(-1)+1(2) & -2(1)+1(0) \\ 3/2(-1)-1/2(2) & 3/2(1)-1/2(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

6. $$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1} = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1(-2)+1(3/2) & -1(1)+1(1/2) \\ 2(-2)+0(3/2) & 2(1)+0(1/2) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

7. $$AX = I \Rightarrow X = A^{-1}I = A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.

Armamos el siguiente sistema con la matriz $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que podemos escribir:

$$\begin{cases} -a+c &= 0 \\ -2a+2c &= 0 \end{cases} \Rightarrow a = c \ \ \forall a, c \in R$$

$$\begin{cases} -b+d &= 0 \\ -2b+2d &= 0 \end{cases} \Rightarrow b = d \ \ \forall b, d \in R$$

Toda matriz B que cumpla con: $a = c$ y $b = d$ cumple con la condición.

Por ejemplo: $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.

1.

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21} = a_{11} \times 26 - 30 \times 44 = -150 \Rightarrow a_{11} \times 26 - 1320 = -150$$

$$\Rightarrow a_{11} = \frac{1170}{26} \Rightarrow a_{11} = 45$$

2. El coeficiente $a_{21} = 44$ representa las importaciones por habitante de Uruguay del año 1880, a pesos constantes de 1900.

3. Para ser la matriz inversa de A, escalerizamos de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 45 & 30 \\ 44 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (44) \\ (-45) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1980 & 1320 \\ -1980 & -1170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 0 \\ 0 & -45 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sumando en la segunda ecuación}$$

$$\begin{pmatrix} 1980 & 1320 \\ 0 & 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 0 \\ 44 & -45 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (-1) \\ (88) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1980 & -1320 \\ 0 & 1320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & 0 \\ 387{,}2 & -396 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sumando en lase primer ecuación}$$

$$\begin{pmatrix} -1980 & 0 \\ 0 & 1320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 343{,}2 & -396 \\ 387{,}2 & -396 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (\% - 1980) \\ (\%1320) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}17 & 0{,}20 \\ 0{,}29 & -0{,}30 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}17 & 0{,}20 \\ 0{,}29 & -0{,}30 \end{pmatrix}$$

4.

$$A_{2\times2}.X_{2\times1} = \begin{pmatrix} 47.000.000 \\ 42.000.000 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Premultiplicando por la inversa de A obtenemos:}$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}\begin{pmatrix} 47.000.000 \\ 42.000.000 \end{pmatrix} \Rightarrow I.X = A^{-1}\begin{pmatrix} 47.000.000 \\ 42.000.000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -0{,}17 & 0{,}20 \\ 0{,}29 & -0{,}30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 47.000.000 \\ 42.000.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410.000 \\ 1.030.000 \end{pmatrix}$$

5. Los coeficientes de la matriz X representa la cantidad de habitantes de Uruguay, la primer fila es la población en 1880 y la segunda fila es la población en 1900. En 1880 había en Uruguay 410.000 habitantes y en 1900 esta cantidad había aumentado a 1.030.000.

   De esta forma, la multiplicación de la matriz exportaciones e importaciones (expresados en pesos constantes de 1900 por habitante) multiplicado por la cantidad de habitantes da la suma de exportaciones en 1880 y 1900 y la suma de importaciones en 1880 y 1900.

Ejercicio 5.

1. Calcule $P_{2010} - P_{2000}$. ¿Cómo se interpreta este resultado?

$$P_{2000} - P_{2010} = \begin{pmatrix} -14 & 3 & 41 \\ -11 & -1 & 30 \end{pmatrix}$$

La diferencia entre la población de los años 2010 y 2000 se interpreta como la variación en la cantidad de personas residentes en cada una de las regiones, por sexo. De los cálculos realizados se concluye que en Montevideo disminuyó la población total de mujeres en 14 mil y en 11 mil la de los hombres; al norte del Río Negro la población de mujeres se incrementó en 3 mil y disminuyó en mil la de hombres; finalmente, al sur del Río Negro la población de mujeres se incrementó en 41 mil y en 30 mil la de hombres.

2. El Instituto de Estadística había proyectado que la población se incrementaría un 2 % entre el año 2000 y 2010, para ambos sexos y las 3 regiones. Calcule la diferencia entre la población proyectada y los niveles observados para el año 2010. ¿Cuáles son las proyecciones que resultaron superiores a los datos observados?

$$Proyeccion_{2010} = P_{2000} \times 1{,}02 = \begin{pmatrix} 757{,}86 & 294{,}78 & 707{,}88 \\ 666{,}06 & 291{,}72 & 697{,}68 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow Proyeccion_{2010} - P_{2010} = \begin{pmatrix} 28{,}86 & 2{,}78 & -27{,}12 \\ 24{,}06 & 6{,}72 & -16{,}32 \end{pmatrix}$$

Las proyecciones que resultaron superiores a los datos observados se dan en Montevideo y al Norte del Río Negro para ambos sexos.

3. Escriba la matriz del año 2010 como una matriz de 2×2 donde las filas continúan siendo el sexo de las personas, pero las columnas son: Montevideo la primer columna e Interior del país la segunda columna.

$$P_{2010} = \begin{pmatrix} 729 & 1027 \\ 642 & 999 \end{pmatrix}$$

4. Sabiendo que la población proyectada para Uruguay (en miles) para el año 2020 es 1.812 mujeres y 1.694 hombres, calcule e interprete cuáles son las tasas de crecimiento respecto al año 2010 previstas para el conjunto de la población de Montevideo y para el conjunto de la población del Interior del país. Ayuda: recuerde que es posible expresar las proyecciones del año 2020 como un vector columna que le permitirá solucionar el sistema. Cuando calcule la inversa, deje 4 números después de la coma.

Sea $X = \begin{pmatrix} 1812 \\ 1694 \end{pmatrix}$ la proyección realizada para el año 2020.

$$P_{2010} \times b = X \Rightarrow \begin{pmatrix} 729 & 1027 \\ 642 & 999 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 1812 \\ 1694 \end{pmatrix} \Rightarrow b = P_{2010}^{-1} X$$
$$P_{2010}^{-1} = \frac{1}{729(999) - 1027(642)} \begin{pmatrix} 999 & -1027 \\ -642 & 729 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0145 & -0{,}0149 \\ -0{,}0093 & 0{,}0106 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow b = P_{2010}^{-1} X = \begin{pmatrix} 0{,}0145 & -0{,}0149 \\ -0{,}0093 & 0{,}0106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1812 \\ 1694 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0334 \\ 1{,}1048 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las tasas de crecimiento utilizadas para la proyección de población de Uruguay del 2020 asciende a 3,34 % (1,0334-1) para Montevideo y a 10,48 % (1,1048-1) para Interior.