4. Cálculo integral

Desde el punto de vista gráfico, el cálculo integral permite hallar el área de una función en dos dimensiones o de volumen en tres dimensiones. Cuando trabajamos en dos dimensiones se halla el área que está comprendida entre la función y el eje de las x entre dos puntos.

Una de las aplicaciones principales en Ciencias Sociales es para el análisis de la distribución del ingreso en una sociedad. El cálculo integral es el instrumento que se utiliza para calcular las áreas de las curvas de Lorenz, que representan la distribución del ingreso en una sociedad, y en base a ellas se define y calcula el Índice de Gini, un indicador de la desigualdad de esa distribución del ingreso.

4.1. Primitivas

En el capítulo anterior hemos aprendido a calcular la derivada de una función, así como las aplicaciones que dicho concepto tiene para la representación gráfica y la optimización de la misma.

En el presente capítulo vamos a definir una operación inversa a la derivación: la ***primitivación***.

Nos preguntaremos en este caso, dada una función, qué función la tiene como derivada. Por ejemplo, nos preguntaremos: ¿qué función tiene como derivada $2x$? Una posible respuesta sería x^2. Otra sería x^2+1, otra sería x^2-3, otra x^2+1000. Seguramente se te ocurrirán muchísimas más... Las posibles respuestas resultan infinitas.

Si antes habíamos visto que una función tiene **una única derivada**, ahora vemos, en cambio, que tiene **infinitas primitivas**. En el caso del ejemplo anterior, tanto x^2, como x^2+1, x^2-3 o x^2+1000 son todas primitivas de $2x$.

Definición 1. **Primitiva de una función.**

Sea una función $f : A \subseteq R \to R$ y otra función $F : A \subseteq R \to R$.

Se dice que F es una **primitiva** de f si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in A$

Ejemplo 1: Si $f : f(x) = 2x \Rightarrow F : F(x) = x^2$ es una primitiva de f, pues $(x^2)' = 2x$.

Ejemplo 2: Si $f : f(x) = 4 \Rightarrow F : F(x) = 4x$ es una primitiva de f, pues $(4x)' = 4$.

Ejemplo 3: Si $f : f(x) = 3y^2 \Rightarrow F : F(x) = y^3$ es una primitiva de f, pues $(y^3)' = 3y^2$.

Ejemplo 4: Si $f : f(x) = e^x \Rightarrow F : F(x) = e^x$ es una primitiva de f, pues $(e^x)' = e^x$.

Verifica en cada uno de los ejemplos que las anteriores son efectivamente las primitivas de las funciones correspondientes.

Observación:

- $G : G(x) = e^x + 2$ también es primitiva de f, pues $(e^x + 2)' = e^x$.

- $Y : Y(x) = e^x - 5$ también es primitiva de f, pues $(e^x - 5)' = e^x$.

Piensa en tres primitivas más de la función para el caso anterior.

Si una función admite infinitas primitivas, ¿existe alguna relación entre estas? La respuesta es afirmativa y se plantea en la siguiente propiedad.

Propiedad 1. Si dos funciones son primitivas de una misma función, entonces son iguales o difieren en una constante. Si:

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ G'(x) &= f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x) = G(x) + k, \quad k \in R$$

Es decir que una vez calculada una primitiva de una función, las demás simplemente se obtienen sumándole a la primera una constante cualquiera.

Ejemplo 5: Si $f : f(x) = e^x$ la expresión analítica general de todas las primitivas de f es $e^x + k,\ k \in R$.

Ejemplo 6: Si $f : f(x) = 4x^3$ la expresión analítica general de todas las primitivas de f es $x^4 + k,\ k \in R$.

Al igual que se hizo para el caso de las derivadas, resumiremos las primitivas de las funciones elementales en una tabla, a los efectos de que el cálculo sea más sencillo.

Tabla de primitivas

Función $f(x)$	Primitivas de $f(x)$ ($k \in R$)
$c, \quad c \in R$	$cx + k$
$x^n, \quad n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
e^x	$e^x + k$
$e^{ax}, \quad a \neq 0$	$\dfrac{e^{ax}}{a} + k$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + k$

Ejemplo 7: Sea $f : f(y) = y^2$ la expresión analítica general de todas las primitivas de f es $\dfrac{y^3}{3} + k,\ k \in R$.

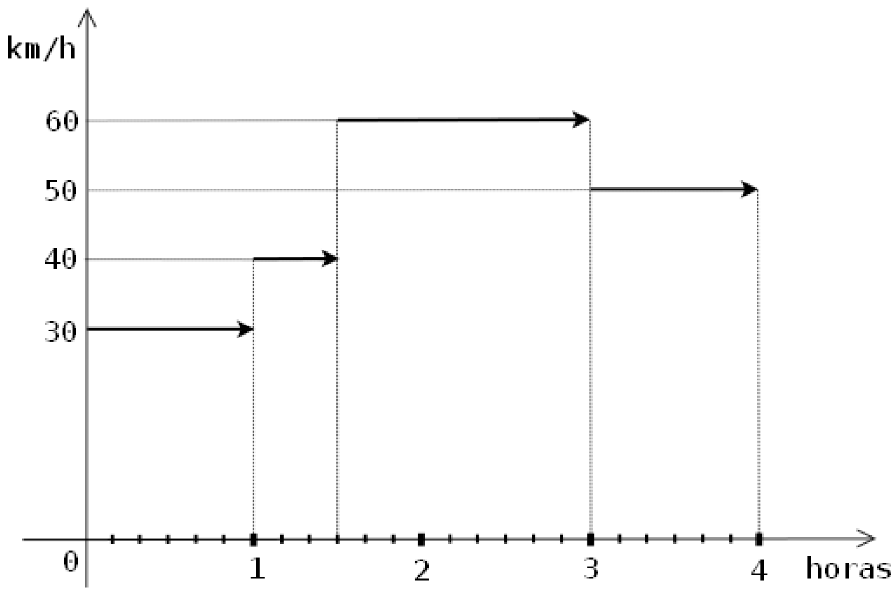
Ejemplo 8: Sea $f : f(y) = \frac{1}{x^2}$. Recordando que $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ y aplicando la regla de la primitiva de x^n, se puede concluir que la expresión general de todas las primitivas de f es $\frac{x^{-1}}{-1} + k = -x^{-1} + k,\ k \in R$.

Ejemplo 9: Sea $f : f(x) = \sqrt{x}$. Recordando que $\sqrt{x} = x^{1/2}$ y aplicando la regla de la primitiva de x^n, se puede concluir que la expresión general de todas las primitivas de f es $\frac{x^{3/2}}{3/2} + k = \frac{2}{3}x^{3/2} + k,\ k \in R$.

4.2. Integrales definidas

A continuación presentaremos un nuevo concepto, el de integral definida en un intervalo. Comenzaremos por ver la utilidad que puede tener, a través de un ejemplo relacionado con una situación cotidiana.

Consideremos una familia que se desplaza en auto por una carretera. En el siguiente gráfico se muestra la velocidad a la que se desplaza el auto en cada momento del tiempo durante las 4 horas que dura el viaje:

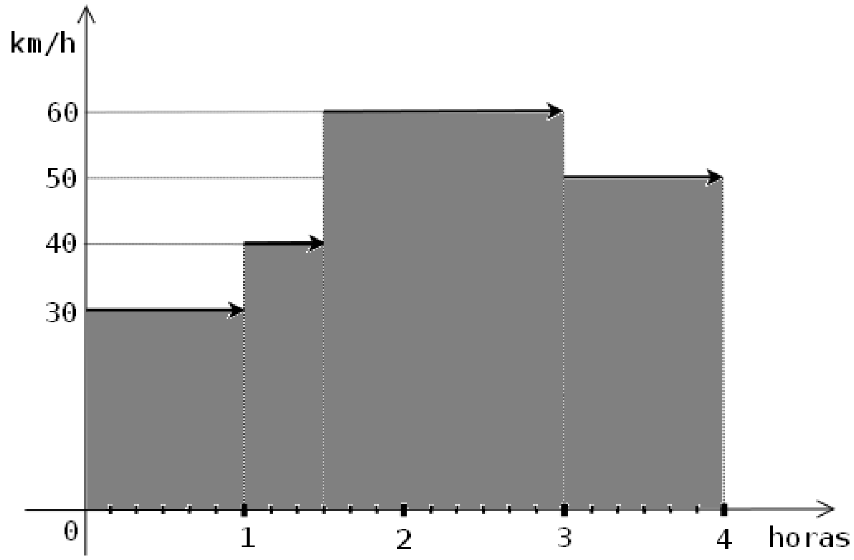


Como vemos, se trata de un gráfico en tramos. Durante una hora el auto mantiene una velocidad de 30km/h, luego acelera mucho y, en un tiempo despreciable, aumenta su velocidad a 40km/h. Después de media hora vuelve a acelerar y pasa a 60km/h, velocidad que mantiene durante hora y media. Finalmente desacelera bruscamente y baja a 50km/h durante la última hora.

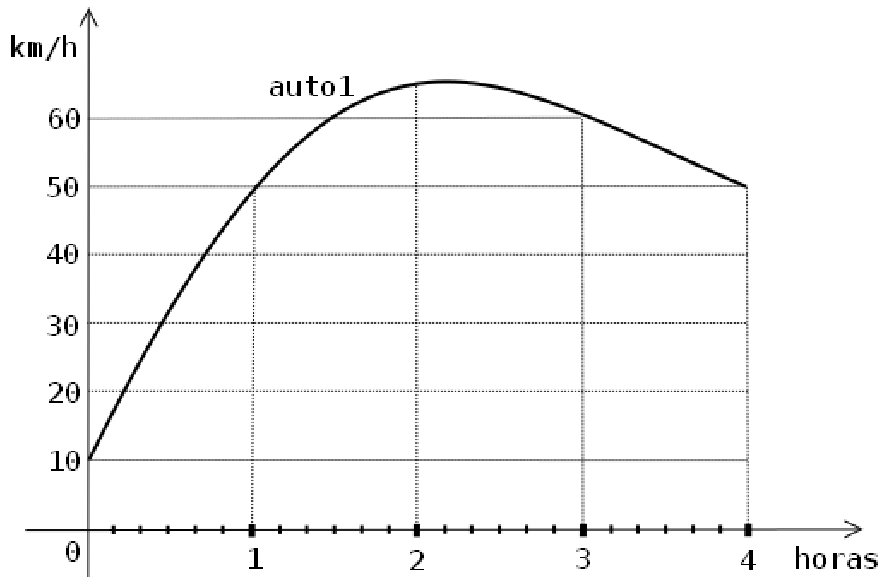
Si nos preguntamos por la distancia que recorrió en total este auto en las 4 horas de viaje, podemos encontrar la respuesta fácilmente considerando su avance en cada tramo, para lo cual multiplicamos la velocidad correspondiente por el tiempo transcurrido en cada tramo del viaje:

1º tramo 30*1	=	30 km
2º tramo 40*0.5	=	20 km
3º tramo 60*1.5	=	90 km
4º tramo 50*1	=	50 km
Total		190 km

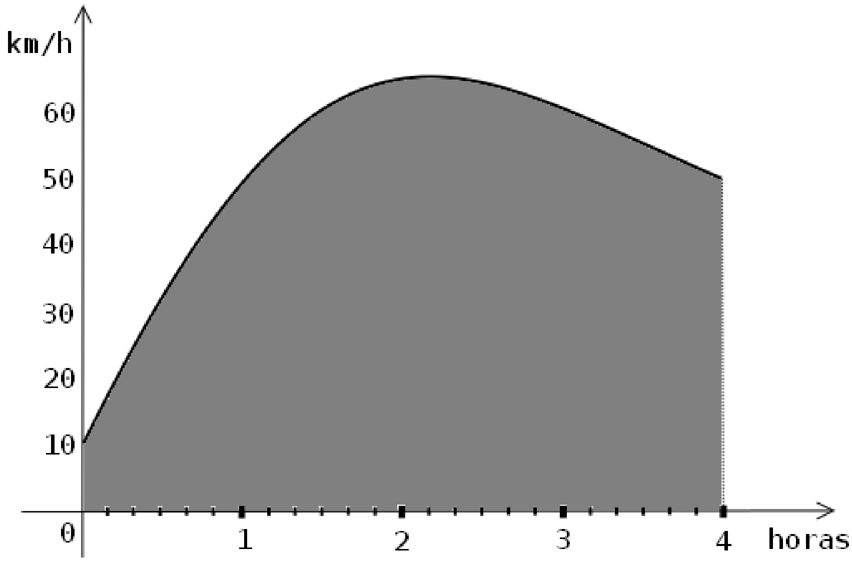
Así, vemos que la distancia total recorrida es 190km. Observemos que este cálculo tiene una interpretación geométrica muy interesante a partir del gráfico anterior: coincide con el área de la región bajo el gráfico, ya que en cada tramo lo que hacemos es simplemente calcular el área de un rectángulo (ver el gráfico a continuación).



Consideremos ahora un auto (auto1) cuyo gráfico de velocidad no sea constante a tramos.

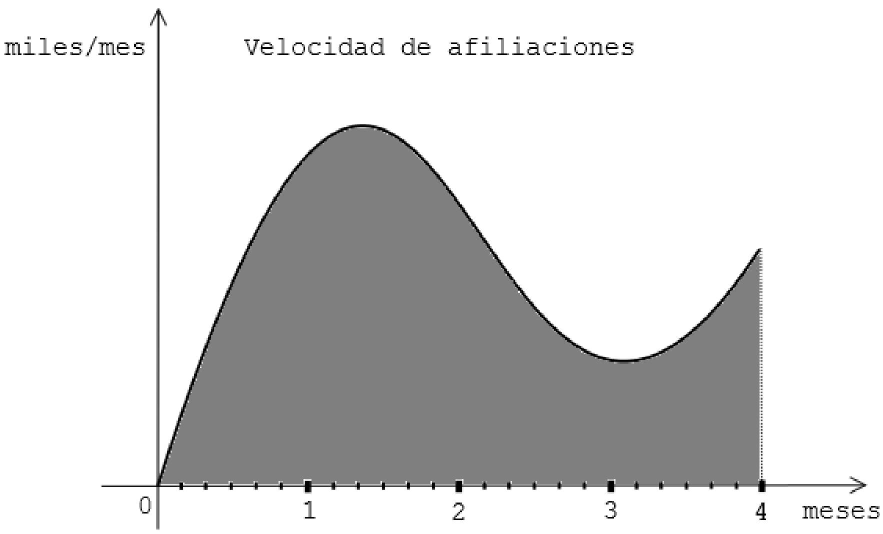


Siguiendo el mismo razonamiento aplicado en el caso anterior, podemos deducir que la distancia recorrida por el auto1 está dada por el valor del área de la región bajo su gráfico de velocidad:



Estos razonamientos por supuesto que no se aplican exclusivamente cuando hablamos de velocidades de movimiento de objetos, sino que siguen siendo válidos en relación a la velocidad o tasa de cambio de cualquier variable.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente caso: el Ministerio de Salud Pública (MSP) registra la tasa (o velocidad) de afiliaciones al sistema mutual y construye a partir de los datos el siguiente gráfico:



Si queremos calcular el total de afiliaciones registradas en los 4 meses, tendremos entonces que calcular el área de la región bajo la curva correspondiente. Calcular esta área no es tan directo como calcular el área de los rectángulos en el ejemplo anterior del auto, pues no disponemos de una fórmula, pero en las próximas páginas desarrollaremos de un método para llevarlo a cabo.

Las anteriores consideraciones nos llevan a definir el concepto de integral definida en un intervalo.

Definición 2. **Integral definida en un intervalo.**

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y R la región comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = b$, y entre el gráfico de la función f y el eje de abscisas.

Denominaremos integral de f en $[a, b]$ y la denotaremos como $\int_a^b f(x)dx$ a un número que estará relacionado con el área de la región R de la siguiente manera:

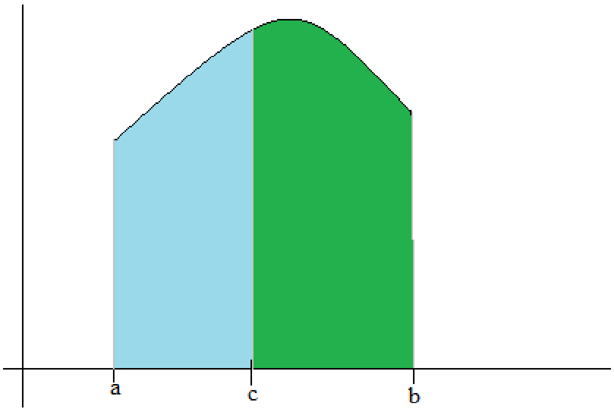
- Si f es no negativa en $[a, b]$ $(f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b])$, entonces $\int_a^b f(x)dx =$Área(R)
- Si f es no positiva en $[a, b]$ $(f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a, b])$, entonces $\int_a^b f(x)dx =$-Área(R)

Observaciones:

1. En el símbolo $\int_a^b f(x)dx$:
   - $f(x)$ es el integrando.
   - a es el límite inferior de integración.
   - b es el límite superior de integración.
   - dx recibe el nombre de "diferencial x" y se refiere al cambio en la variable x $(\triangle x)$. A los efectos del cálculo de la integral definida de una función nos será de utilidad para indicar cuál es la variable con respecto a la cual calcular la integral, en este caso x.
2. $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b f(y)dy$ representan el mismo número. Como el valor de la integral no depende de la variable de integración, se dice que esta es "muda".
3. Obsérvese que un área es siempre un número positivo, sin embargo una integral puede ser un número negativo (como sucede en el caso en que f es una función no positiva en $[a, b]$).
4. El caso en que la función cambie de signo en el intervalo $[a, b]$ se tratará más adelante.

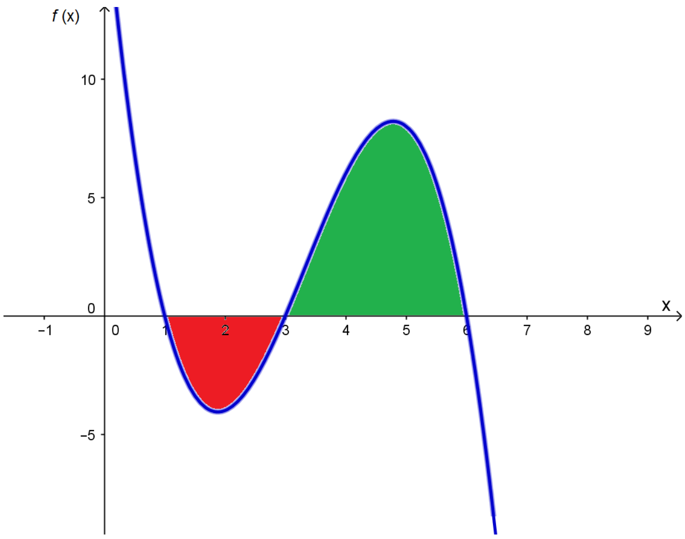
Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. <u>Propiedad de aditividad respecto del intervalo:</u> Si f es continua en $[\alpha, \beta]$ y $a, b, c \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ Si f es no negativa $(f(x) \geq 0\ \forall x \in [\alpha, \beta])$ y $a < c < b$ esta propiedad tiene una fácil interpretación geométrica: cada una de las integrales representa el área de una región, las dos últimas como resultado de partir el intervalo $[a, b]$ en los subintervalos $[a, c]$ y $[c, b]$.



Sin embargo, la propiedad es más general: se cumple sin importar el signo de f y sin importar la posición relativa de a, b, y c.

Esta propiedad es sumamente útil para conceptualizar la integral de una función que cambie de signo en el intervalo $[a, b]$. Consideremos el caso de la función f cuyo gráfico se presenta a continuación y concentrémonos en el intervalo $[1, 6]$:



En el intervalo [1,6] f no tiene signo constante: $f(x) \leq 0$ si $1 \leq x \leq 3$ y $f(x) \geq 0$ si $3 \leq x \leq 6$.

Para entender qué significa el valor de la integral $\int_1^6 f(x)dx$, podemos aplicar la anterior propiedad de aditividad respecto del intervalo y descomponerla así:

$$\int_1^6 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx$$

Podemos entonces interpretar la integral $\int_1^6 f(x)dx$ como el área de la región en verde menos el área de la región en rojo.

4. Propiedad de linealidad:

   4.1 $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad c \in R$

   4.2 $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Hasta ahora hemos definido qué entendemos por integral definida, así como presentado algunas de sus propiedades, pero no hemos planteado cómo calcularla. Eso es precisamente lo que haremos a continuación.

Propiedad 2. **Regla de Barrow.** Sea f una función continua en $[a,b]$ y F una primitiva cualquiera de f. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Esta propiedad resuelve el problema de calcular el valor de una integral definida. Para ello, basta con encontrar una primitiva cualquiera de f, evaluarla en $x=a$ y $x=b$, y restar ambos valores.

Ejemplo 10:

$$\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{2^2}{2}\right] - \left[\frac{1^2}{2}\right] = \left[\frac{4-1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right]$$

Ejemplo 11:

$$\int_{-1}^1 e^x dx = [e^x]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} \approx 2{,}35$$

Ejemplo 12:

$$\int_1^5 \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^5 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5) \approx 1{,}61$$

Ejemplo 13:

$$\int_0^2 (2x-3)dx = 2\int_0^x dx + \int_0^2 -3dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{-}{3}x\right]_0^2$$

$$= 2\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] + [-3(2) - (-3(0))] = -2$$

Otra manera más rápida de calcular la anterior integral y la cual recomendamos aplicar consiste en calcular directamente una primitiva de la función integrando, sin recurrir a la propiedad de linealidad, como se hace a continuación:

$$\int_0^2 (2x-3)dx = \left[x^2 - 3x\right]_0^2 = \left[2^2 - 3(2)\right] - \left[(0)^2 - 3(0)\right] = -2$$

Ejemplo 14:

$$\int_2^5 2x^2 dx = \left[2\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \left[2\frac{5^3}{3} - 2\frac{2^3}{3}\right] = \frac{250}{3} - \frac{16}{3} = \frac{244}{3}$$

Ejemplo 15:

$$\int_1^3 \frac{5}{x^3}dx = \int_1^3 5x^{-3}dx = \left[5\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 = \left[-\frac{5}{2x^2}\right]_1^3 = \left[-\frac{5}{2(3^2)} - \left(-\frac{5}{2(1^2)}\right)\right] = \frac{5}{18} + \frac{5}{2} = \frac{20}{9}$$

Ejemplo 16:

$$\int_{-1}^1 |x|dx = \int_{-1}^0 -xdx + \int_0^1 xdx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{0^2}{2} + \frac{1^2}{2}\right] + \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Para calcular la anterior integral recordar que el valor absoluto de un número real se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Existen otros métodos para calcular integrales definidas de funciones más complejas, tales como el método de partes, de cambio de variable, o de fracciones simples. Los mismos no serán tratados en estas notas, por exceder el alcance del presente curso, pero en caso que el estudiante desee indagar en ellos, puede consultar en cualquier libro de cálculo, por ejemplo en el de Fernando Peláez.[1]

4.3. Cálculo de áreas de regiones comprendidas entre dos curvas

Supongamos que se quiere calcular el área de la región comprendida entre dos funciones en el intervalo $[a, b]$, como en la figura A.

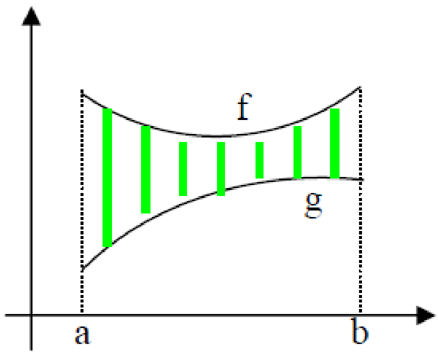


FIGURA A

Esta área se puede calcular como la diferencia entre las áreas de las siguientes dos regiones, las cuales pueden calcularse como $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$:

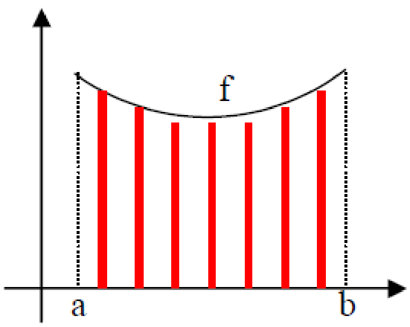


FIGURA B

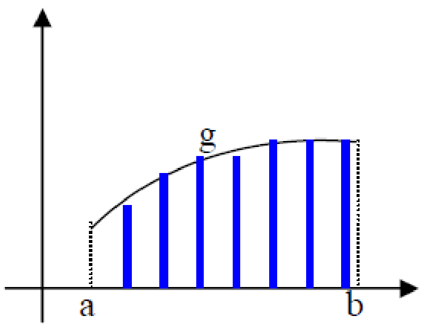


FIGURA C

Entonces, el área de la figura A en este caso es:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

[1] "Cálculo", Fernando Peláez Bruno, capítulo 3.

Nótese que, dado que el área debe dar un número positivo, la diferencia $f(x) - g(x)$ debe ser mayor o igual que 0, lo que se consiguió en el ejemplo, restando la función mayor (f) menos la menor (g).

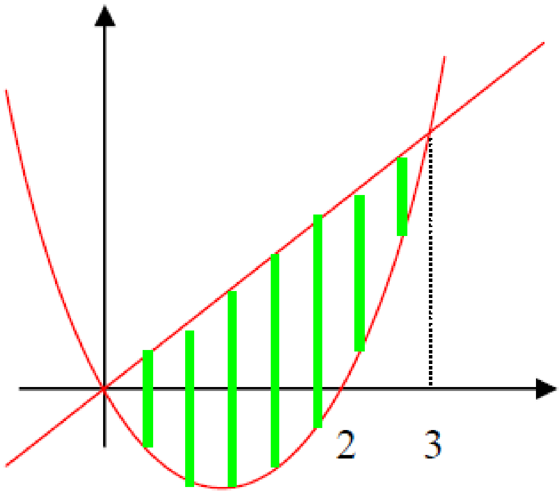
Una manera más general de conseguir el mismo resultado es trabajar con valor absoluto, como se plantea a continuación.

Definición 4. **Área de una región comprendida entre dos curvas.**

Sea R una región comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = b$, y los gráficos de las funciones f y g. Se define entonces:

$$\text{Área}(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Ejemplo 17: Hallar el área de la región comprendida entre la recta de ecuación $y = x$ y la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x$.



Queremos calcular, entonces, el área de la región señalada con rayas. En primer lugar, debemos hallar los puntos de corte de ambas curvas, los cuales se obtienen igualando sus ecuaciones:$x^2 - 2x = x$, obteniéndose dos puntos de corte, en que $x = 0$ y $x = 3$.

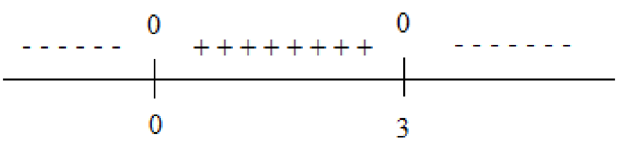
Tenemos entonces que: $\text{Área}(R) = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx$.

Observando la gráfica, se aprecia que la recta es mayor o igual que la parábola en el intervalo [0,3], con lo cual:

$$\text{Área}(R) = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \int_0^3 [-x^2 + 3x] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} + \frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} \right) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

También habríamos podido calcular el área sin recurrir al gráfico de las funciones. Para ello hubiéramos tenido que estudiar el signo de $f(x) - g(x) = x - (x^2 - 2x) = -x^2 + 3x$



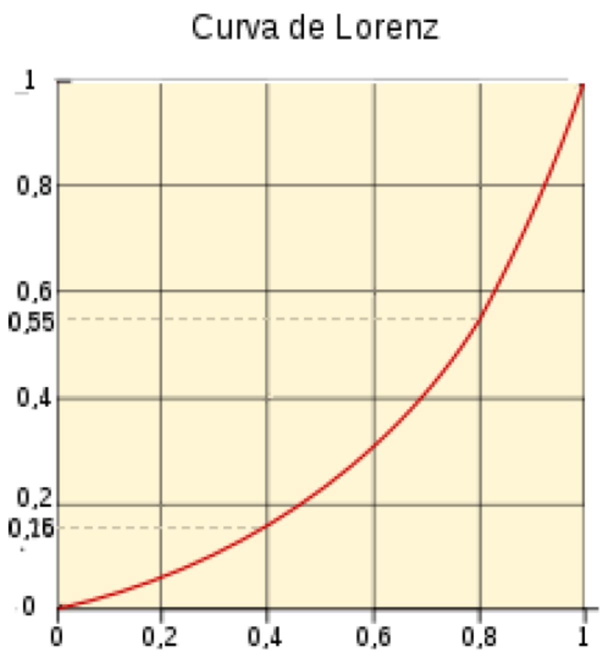
Con lo cual:

$$\text{Área}(R) = \int_0^3 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^3 | - x^2 + 3x| dx = \int_0^3 [-x^2 + 3x] dx = \frac{9}{2}$$

Aplicación de las integrales al cálculo del Índice de Gini

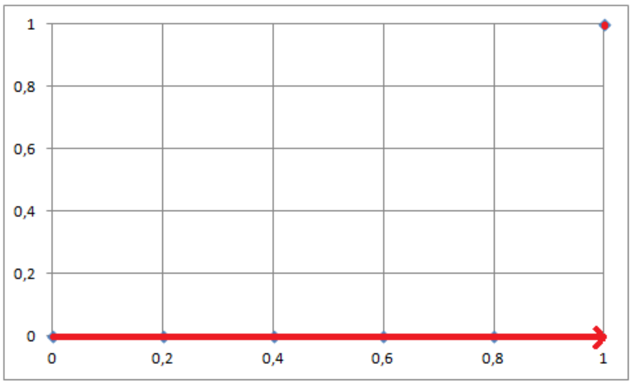
Una de las aplicaciones que tienen las integrales en el ámbito de las Ciencias Sociales es como instrumento para definir el denominado Índice de Gini. Este es un índice de concentración, generalmente aplicado para medir la concentración del ingreso. Su cálculo se basa, a su vez, en la denominada curva de Lorenz.

La curva de Lorenz es una gráfica que permite representar visualmente la distribución de una variable (en particular, del ingreso) en una sociedad. Dicha gráfica corresponde a una función que, dada cierta proporción de la población, le asocia la proporción del total de ingresos que le corresponde. Como estamos hablando de proporciones con respecto a un total, tanto el dominio como el codominio de la función son el intervalo [0,1]. En el eje de abscisas se representa la proporción acumulada de población (luego de haber ordenado esta de menor a mayor de acuerdo a sus ingresos), mientras que en el eje de ordenadas se representa la proporción acumulada de ingresos.

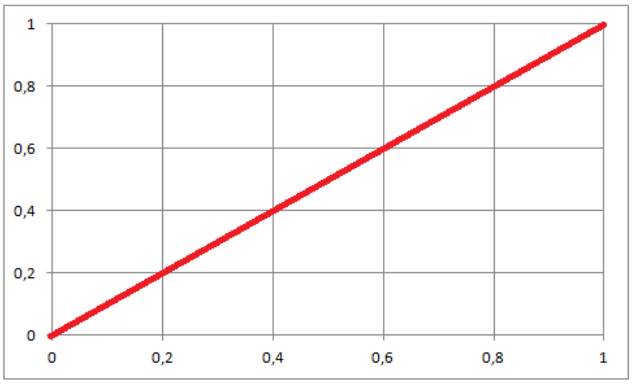


En el ejemplo de la figura se tiene que el 40 % (0,4 expresado en proporción) más pobre de la población acumula el 16 % (0,16 expresado en proporción) del total de ingresos de la sociedad, mientras que el 80 % (0,80) de menores ingresos de la población acumula el 55 % (0,55) del total de ingresos.

En una sociedad completamente inequitativa en la distribución de su ingreso (una en que ningún integrante de la sociedad percibe ingresos, con excepción de uno, que percibe todos los ingresos de la misma), el gráfico de la curva de Lorenz sería el siguiente:



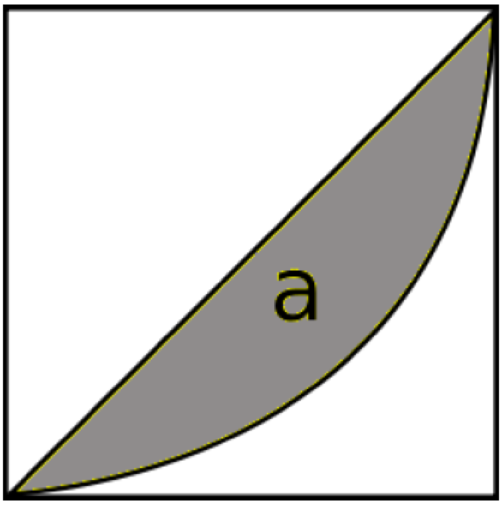
En el otro extremo, una sociedad completamente equitativa en su distribución del ingreso (una en que todos los integrantes de la sociedad perciben el mismo ingreso), la curva de Lorenz sería la siguiente:



En este caso la curva adquiere la forma de una recta, denominada recta de equi-distribución.

Las sociedades habitualmente tienen una curva de Lorenz cuyo gráfico se encuentra entre las dos situaciones extremas anteriormente presentadas. La mayor equidad o inequidad en la distribución del ingreso se va a reflejar en una curva de Lorenz más próxima a uno u otro extremo.

El índice de Gini, por su parte, es un indicador del grado de concentración del ingreso (o lo que es lo mismo, de desigualdad en la distribución del ingreso). El mismo se define como el doble del área de la región comprendida entre la curva de Lorenz y la recta de equi-distribución (región señalada como "a" en la siguiente figura):



Se considera el doble del área con el fin de que el índice de Gini varíe entre 0 y 1. El índice tomará el valor de 0 cuando el área de la región sea la menor posible, es decir, 0, lo cual equivale a decir que la sociedad es completamente equitativa en su distribución del ingreso. En cambio, tomará el valor de 1 cuando el área sea la máxima posible, lo cual coincide con la situación en que la distribución del ingreso es completamente inequitativa. Cuanto mayor sea el valor que toma el índice, más inequitativa será entonces la distribución del ingreso (habrá mayor concentración).

Ejemplo 18: Supongamos que se desea analizar la distribución del ingreso en dos departamentos de Uruguay, uno al norte del Río Negro y otro al sur. Se tiene que en el departamento norteño la curva de Lorenz responde a la función $f : f(x) = x^2$. En el departamento del sur, por su parte, la curva de Lorenz responde a la función $g : g(x) = x^3$.

¿En cuál de los dos departamentos la distribución del ingreso es más equitativa?

Para responder esta pregunta calcularemos el índice de Gini (IG) para cada uno de los departamentos.

$$IG_{norte} = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

$$IG_{sur} = 2\int_0^1 (x - x^3)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$IG_{norte} < IG_{sur} \Rightarrow$ La distribución del ingreso es más equitativa en el departamento del norte, pues su índice de Gini es menor.

Definición 5. **Función integral.**
Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Se denomina ***Función integral*** asociada a la función f en el intervalo $[a, b]$ a una función $F : [a, b] \to R$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Ejemplo 19: Hallar la función integral asociada a $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,3].

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

Una vez que tenemos calculada la función integral, la podemos utilizar para calcular algunas integrales concretas. Por ejemplo, retomando el caso anterior:

$$\int_0^x x^2 dt = \int_0^2 t^2 dt = F(2) = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

De esta forma nos evitamos tener que hacer todos los cálculos de nuevo.

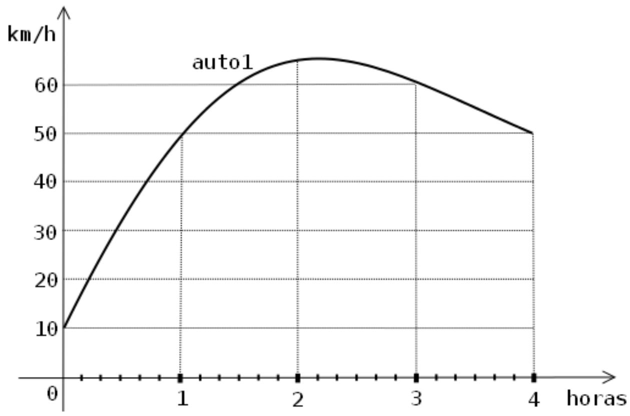
A continuación presentaremos, aunque sin demostrarlo, uno de los principales resultados del Cálculo de integrales: el Teorema Fundamental.

Teorema 1. Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

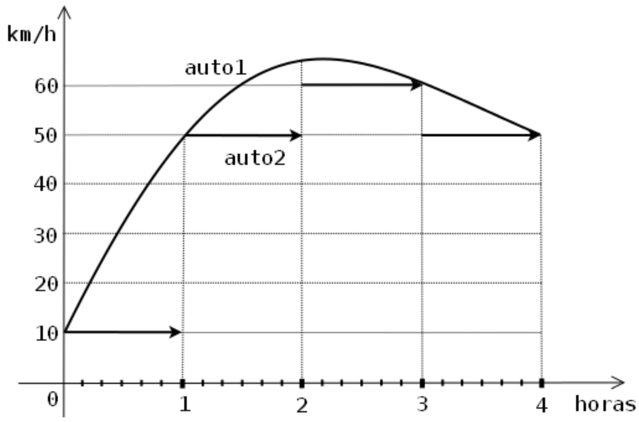
Sea f una función continua en $[a, b]$ y $F : [a, b] \to R$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Entonces, se cumple que F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Anexo 1: Sobre la definición de integral definida

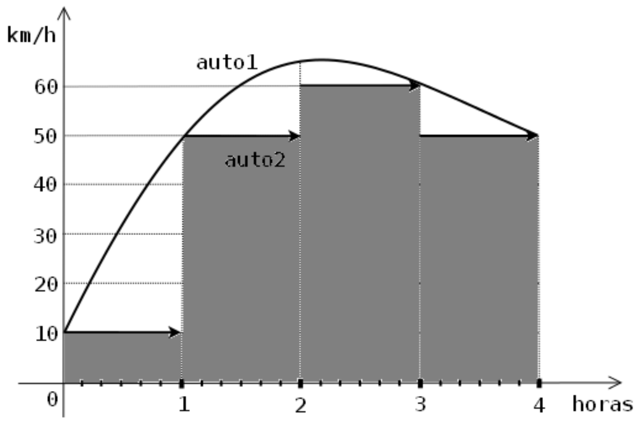
Consideremos un auto (auto1) cuya gráfica de velocidad no sea constante a tramos.



En este caso, determinar la distancia recorrida por el auto durante las 4 horas no resulta tan sencillo. Como forma de aproximarnos a la solución, imaginemos otro auto (auto2) que sí mantenga su velocidad constante durante ciertos períodos de tiempo.

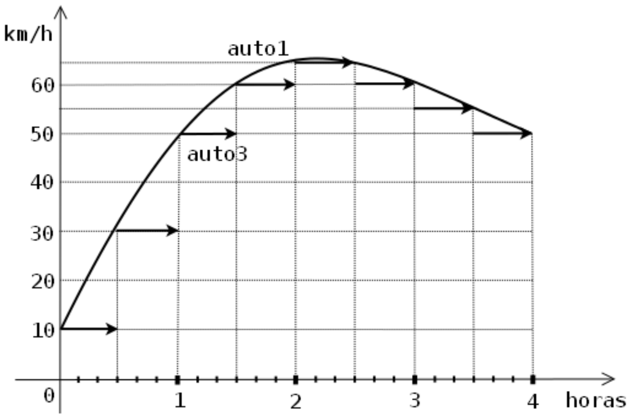


La distancia recorrida por el auto2 no va a ser la misma que la recorrida por el auto1, pero será "parecida" ya que las velocidades desarrolladas por ambos autos a lo largos de las 4 hs no son demasiado distintas. La distancia recorrida por el auto2 podemos calcularla y ya vimos que corresponde al área de la región bajo su gráfico.

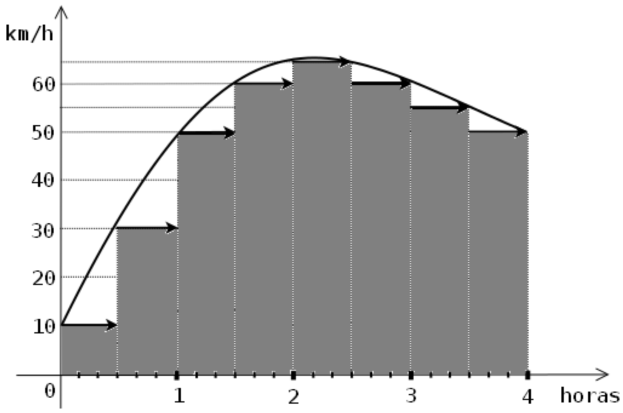


Realizando el cálculo vemos que el auto2 recorre $10 \times 1 + 50 \times 1 + 60 \times 1 + 50 \times 1 = 170$ km. Por lo tanto, podemos pensar que 170 km es una "estimación" de la distancia recorrida por el auto1.

Esta estimación puede ser mejorada, ya que podemos imaginar un auto3 cuyo gráfico de velocidades sea el siguiente:



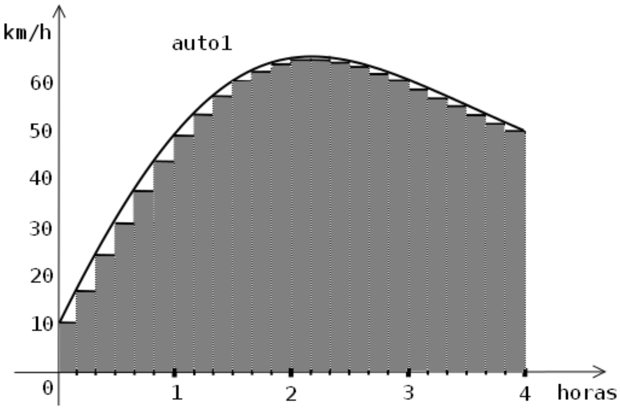
Debido a que las velocidades del auto3 y del auto1 son más similares que en el caso anterior, claramente la distancia recorrida por el auto3 se aproxima aún más a la recorrida por el auto1.



Realizando el cálculo, vemos que el auto3 recorre: $10 \times 0,5 + 30 \times 0,5 + 50 \times 0,5 + 60 \times 0,5 + 65 \times 0,5 + 60 \times 0,5 + 55 \times 0,5 + 50 \times 0,5 = 190$ km.

Este valor representa nuestra nueva estimación.

Este procedimiento de mejora de la estimación de la distancia recorrida por el auto1 puede continuarse; basta considerar autos con velocidad constante en intervalos cada vez más chicos de tiempo.



En cada mejora de la estimación lo que hacemos es calcular el área de la región bajo la curva de la función constante a tramos, lo cual no es otra cosa que una estimación del área de la región bajo la gráfica de la función del auto1.

En base a lo anterior, podemos entonces concluir que la distancia recorrida por el auto1 está dada -de forma exacta- por el valor del área de la región bajo su gráfica de velocidad: