Repartido práctico Nº5: Cálculo integral

Matemática 2 - FCS - UDELAR

2024

Ejercicio 1.
Encontrar tres primitivas para cada una de las siguientes funciones:

1. $f : f(x) = 3x^2 + 4x + 10$
2. $f : f(x) = e^x - x + 5$
3. $f : f(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$
4. $f : f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f : f(x) = e^{3x+2} - 1$
6. $f : f(x) = \dfrac{2}{x-1}$
7. $f : f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2+x}$

Ejercicio 2.
Indicar, justificando, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. $3x^3 + 5x^2 - 2x + 10$ es una primitiva de $9x^2 + 10x - 2$
2. e^{3x+5} es una primitiva de $3e^{3x+5}$
3. $x^2 . e^x$ es una primitiva de $2x . e^x$
4. $e^x(2x - 2) + 2$ es una primitiva de $2xe^x$
5. $ln(2x + 4)$ es una primitiva de $\dfrac{1}{x+2}$
6. $ln(x^2 + 2) + 3$ es una primitiva de $\dfrac{2x}{x^2+2}$

Ejercicio 3.
En cada caso encontrar la función F primitiva de f, de forma tal que se cumplan las condiciones requeridas:

1. $f : f(x) = x^2 + x$ y F se anula en 1
2. $f : f(x) = \dfrac{1}{-2+x} + 3$ y $F(3) = 9$
3. $f : f(x) = e^{-3x} + 2x$ y $F(0) = 1$

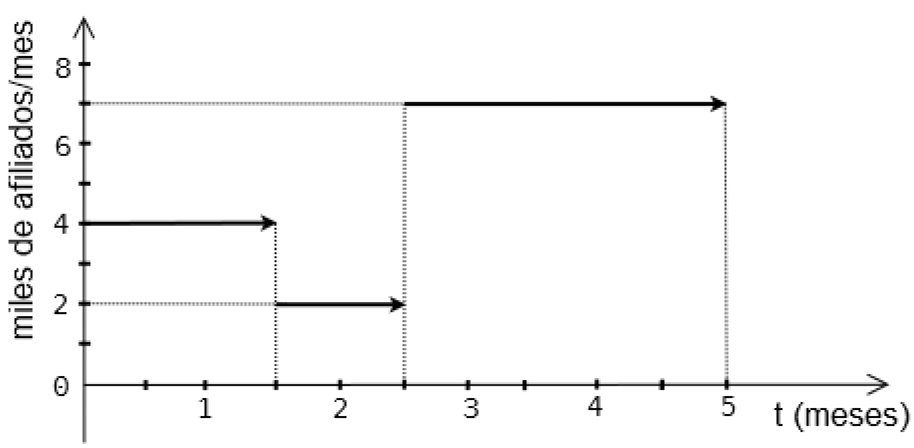
Ejercicio 4.
Se sabe que la función de Producto Marginal de una empresa que produce mermeladas es la siguiente:

$$PMa : (0, \infty) \to \mathbb{R} / PMa(x) = 210x^{-0,5}$$

donde x es la cantidad de horas de trabajo contratadas mensualmente y $PMa(x)$ está expresado en kg de mermelada.

1. Calcular $PMa(900)$.
2. ¿Cómo puede interpretarse el resultado anterior en el contexto del ejercicio?
3. Sabiendo que cuando se contratan 1.600 horas de trabajo mensuales, se obtiene una producción de 17.000 kg de mermelada, calcular la función de Producto Total.

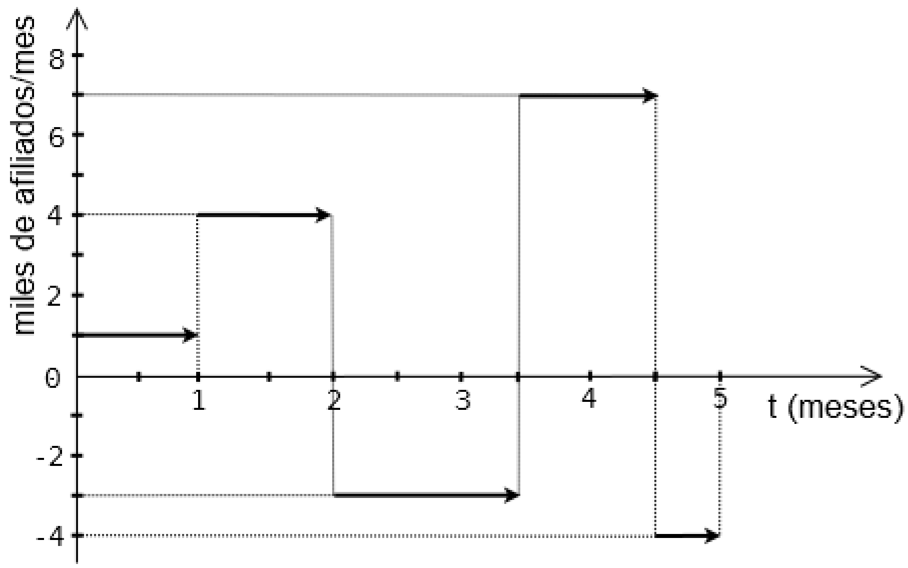
Ejercicio 5.
Una mutualista A registra a partir de enero de 2015 la velocidad de afiliaciones y desafiliaciones (miles/mes) durante 5 meses, la cual se representa en el siguiente gráfico:



1. Sabiendo que a comienzos de enero dicha mutualista contaba con 10.000 afiliados, determinar la cantidad de afiliados que tendrá a mitad de enero.
2. ¿Cuál es el saldo neto de afiliaciones registrado entre inicios de febrero y la mitad de abril?

3. ¿En qué momento la mutualista alcanza los 14.500 afiliados?
4. ¿En qué momento la mutualista alcanza los 21.000 afiliados?

Otra mutualista B realiza el mismo tipo de registro durante el mismo periodo de tiempo. En este caso, la mutualista cuenta con 20.000 afiliados a comienzos de enero.



A partir del gráfico correspondiente, determinar:

5. ¿Cuantos afiliados tiene la mutualista B a mitad de marzo?
6. ¿Cuál es el saldo neto de afiliaciones entre inicios de marzo y principios de mayo?
7. ¿Cuál es el saldo neto de afiliaciones entre la mitad de enero y la mitad de abril?
8. ¿En qué momento la mutualista tiene 26.000 afiliados?

Ejercicio 6.
Calcular las siguientes integrales:

1. $\int_1^3 (6x^2+3x-2)dx$
2. $\int_0^2 3x^3-2x+10dx$
3. $\int_{-1}^2 4x^2+3x-1dx$
4. $\int_1^e \frac{3}{x}dx$
5. $\int_{-2}^0 \frac{2}{x-1}dx$
6. $\int_{-3}^3 e^{x+2}+2x-1dx$
7. $\int_1^4 \frac{1}{x^3}dx$
8. $\int_1^4 \frac{3}{x^4}+5xdx$
9. $\int_2^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$
10. $\int_0^2 \frac{1}{3x+4}dx$
11. $\int_{-1}^3 |x-2|dx$
12. $\int_{-3}^2 |x^2+x-2|dx$
13. $\int_2^4 \frac{3x^5+4x^4-x^3}{x^2}dx$

Ejercicio 7.
Un club de fútbol analiza la evolución en la cantidad de sus afiliados a lo largo del tiempo. A partir de dicho análisis se construye la siguiente función que pronostica la velocidad de afiliaciones/mes del 1º de enero del 2020 en adelante

$$VA : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / VA(t) = 100t^2 - 700t + 1000$$

donde $VA(t)$ representa la tasa de afiliaciones/mes, t meses a partir de comienzos de enero del 2020.

1. Calcular $\int_0^1 VA(t)dt$ y $\int_0^4 VA(t)dt$. Interpretar dichos valores.
2. ¿En que período se pronostica que el club va a perder afiliados?
3. ¿Cual es la cantidad total pronosticada de afiliados que el club perdería?

Ejercicio 8.
Una empresa se instala en Uruguay a comienzos del 2019 y luego de un análisis de mercado, realiza una proyección de la evolución de su tasa de utilidades a lo largo del tiempo. Dicha proyección se expresa a través de la función

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / g(t) = \frac{1}{10} - 3e^{-t}$$

donde $g(t)$ representa la tasa instantánea de utilidades (en millones de dolares por mes) t meses a partir de enero de 2019 ($t = 0$ comienzos de enero).

Se pide:

1. Calcular el saldo neto de utilidades de la empresa durante enero de 2019. Ídem para junio de 2019.
2. ¿En qué mes la tasa instantánea de utilidades vale 0?
3. ¿Cual es el saldo neto de pérdidas que el modelo predice que ocurrirá durante el año 2019?
4. Supongamos que la empresa comienza sus negocios disponiendo de un fondo de 5 millones de dolares. Dar una expresión para la función $F(t)$ que describe los fondos que dispone la empresa t meses a partir de enero de 2019.
5. ¿Que predice el modelo que sucederá con los fondos de la empresa en el largo plazo?

Ejercicio 9.
Siendo t la variable tiempo (expresada en minutos), el siguiente modelo: $M(t) = t^3.e^{\frac{-t}{60}}$, registra la velocidad (expresada en dólares/minuto) a la que se moviliza el dinero en las transacciones financieras llevadas a cabo en la bolsa de una ciudad europea durante un lapso de 24 horas de actividad.
Se pide:

1. Calcular a qué hora la velocidad de movilización de dinero es mayor y cuánto vale dicha velocidad.
2. Graficar $M(t)$ para $0 \leq t \leq 1{,}440$
3. Probar que la función: $e^{\frac{-t}{60}}(-60t^3 - 10800t^2 - 1296000t - 77760000)$ es una primitiva de $M(t)$.
4. Calcular $\int_0^{1440} M(t)dt$
5. ¿Qué significa el valor calculado en el punto anterior respecto a la situación planteada?

Ejercicio 10.
Las personas en la industria manufacturera han observado en muchas ocasiones que los empleados asignados a un nuevo trabajo resultaron más eficientes conforme a la experiencia. Esto es, a medida que el empleado repite la prueba se vuelve más afín con las operaciones, movimientos y equipos requeridos apra ejecutar el trabajo. Algunas compañías tienen suficientes experiencias con entrenamiento de trabajo y pueden proyectar qué tan rápido un empleado aprenderá un trabajo. Esto se llama curva de aprendizaje.

La curva de aprendizaje de un trabajo en particular ha sido definida en los siguientes términos:

$$h(x) = \frac{20}{x} + 40, x \geq 1$$

donde $h(x)$ representa a las horas de producción (por unidad producida) y x la cantidad total de unidades producidas por el trabajador.

1. Determine cuántas horas de producción son necesarias para producir la décima unidad, cuando se está en proceso de aprendizaje.
2. Calcule la tasa instantánea de cambio en las horas de producción por unidad producida, cuando se produce la primer unidad y cuando produce la décima unidad. Interprete el resultdo obtenido.
3. ¿La curva de aprendizaje está acotada cuando el número de unidades producidas aumenta? (¿Existen máximo y/o mínimo absoluto para la función h?) Justifique su respuesta e interprete el resultado obtenido.
4. La integración de la curva de aprendizaje en un intervalo nos dice el número total de horas de producción requeridas en el nivel correspondiente de producción. Determine el número total de horas que tardará en producir las primeras 20 unidades.

Ejercicio 11.
En los últimos tiempos se ha incrementado la violencia en el fútbol Las detenciones ocurridas en los últimos partidos, como consecuencia de los incidentes se ha incrementado sustancialmente. El Ministerio del Interior (MI) está muy preocupado ya que no tiene lugar en las cárceles para retener a tantos detenidos. De esta forma el MI le solicita a un asesor (Licenciado en Desarrollo) que le indique cuál será la evolución del número de detenidos en partidos de fútbol previstos para los próximos meses. Este asesor indica que la función que da cuenta de la evolución de las detenciones en partidos es de la forma:

$$f : f(t) = 300e^{0{,}1t}$$

donde $f(t)$ representa la tasa de detenidos por mes en incidentes de fútbol y t representa el tiempo transcurrido, medido en meses. $t = 0$ se fija en el $1^{\underline{o}}/7/2016$, fecha en la que comenzó el último campeonato de fútbol.

En base a estos datos se pide:

1. Calcule la tasa de detenidos en el segundo mes luego de iniciado el nuevo campeonato. ¿Cómo se interpreta este resultado?

2. Determine el número esperado de detenciones por incidentes en partidos de fútbol desde que comenzó el campeonato hasta el 31/12/2016. El MI declara que si las detenciones superan las 2000 al 31/12/2016 año suspenderá los próximos campeonatos. ¿Qué decisión tomará el MI según este modelo?

3. Si la capacidad disponible que tiene el MI en las cárceles es 1500 personas, ¿cuánto tiempo pasará desde el comienzo del campeonato para que se llenen las cárceles?

Ejercicio 12.
Considérese una función f continua en el intervalo $[1, 10]$ tal que $\int_1^{10} f(x)dx = 20$ y $\int_1^4 f(x)dx = -15$

1. Calcular $\int_4^{10} f(x)dx$

2. ¿Puede decir algo sobre el signo de la función f en el intervalo $[1, 4]$? Fundamente.

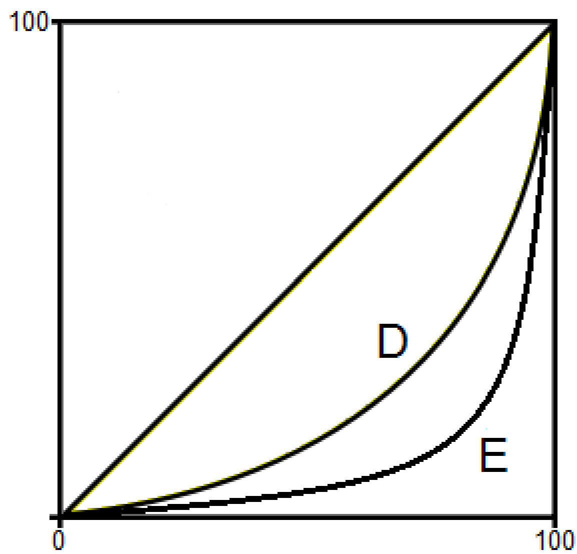
Ejercicio 13.
Analice la veracidad de la siguiente afirmación. En caso que sea verdadera, demuéstrelo; en caso que sea falsa, presente un contra-ejemplo.

Sea una función f continua en un intervalo $[a, b]$. Si $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$

Ejercicio 14.

1. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones $f : f(x) = x^3$ y $g : g(x) = 4x$, y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.
2. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de las funciones anteriores, y las rectas $x = -4$ y $x = 0$.

Ejercicio 15.
Consideremos las siguientes curvas de Lorenz correspondientes a dos sociedades:



Se pide:

1. Determinar las funciones D y E sabiendo que:
   - D es un polinomio de segundo grado cuya única raíz es 0.
   - E es un polinomio de cuarto grado cuya única raíz es 0.
2. Compare los ingresos del 20 % más pobre y del 20 % más rico en ambas sociedades.
3. Calcular el índice de Gini de concentración del ingreso para cada una de las dos sociedades. ¿Cuál de las dos sociedades es más igualitaria en sus ingresos?

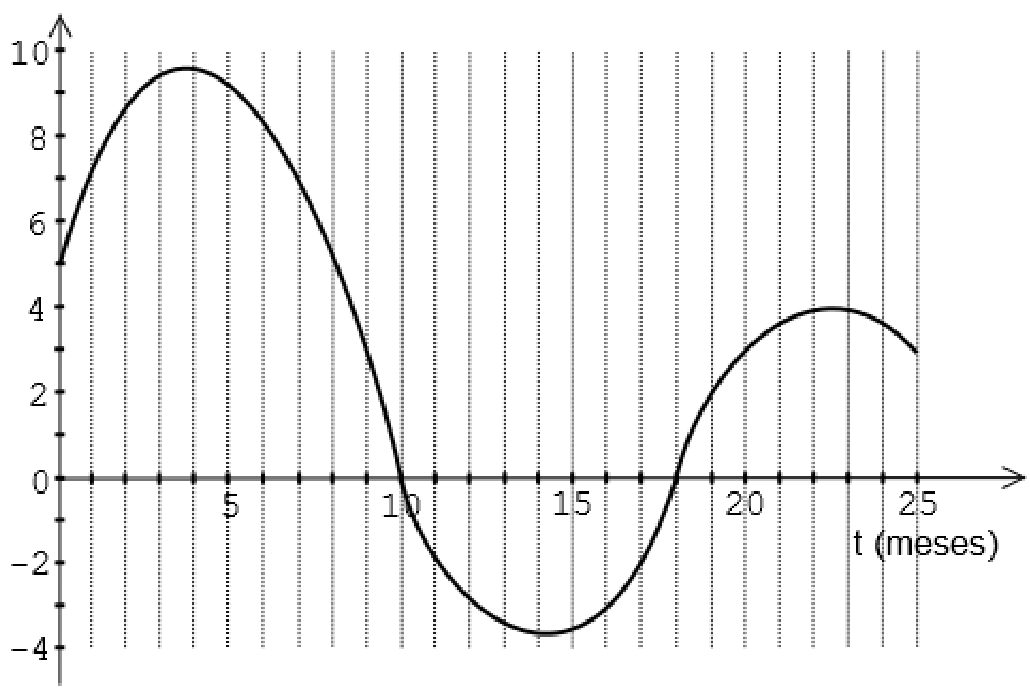
Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.
En cada uno de los siguientes casos encontrar todas las primitivas de la función cuya expresión analítica está dada por:

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = 2x$
3. $f(x) = 3x - 2$
4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 - 3}{x^2}$
6. $f(x) = 4x^2 + 3x + 2$
7. $f(x) = 2x^4 - \dfrac{3}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$
9. $f(x) = \dfrac{4}{x}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
11. $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$
12. $f(x) = 8x^3 - 2e^{4x}$
13. $f(x) = e^x - e^{-2x}$

Ejercicio 2.
Hallar una función F tal que $F''(x) = 3x^2 - e^x - 2$ y $F'(0) = F(0) = 1$

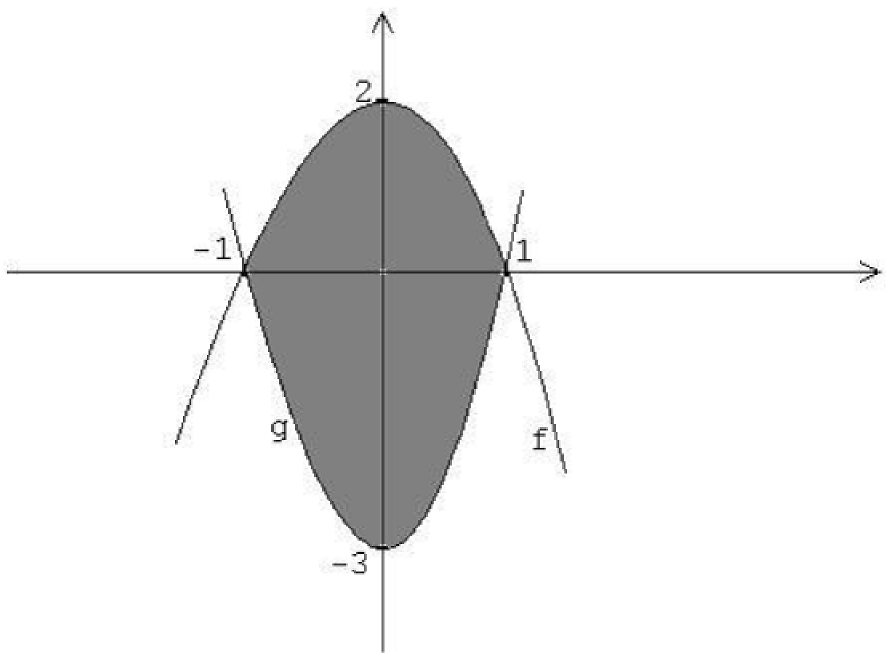
Ejercicio 3.
El banco central de un país registra la tasa instantánea de variación de sus reservas a los largo de 25 meses. A partir de esos datos el banco construye la función f representada en el gráfico siguiente:



donde t representa meses a partir de enero del 2013 y $f(t)$ está expresada en miles de millones de dólares/mes. Sabemos que el banco cuenta con 5.000 millones de dólares a comienzos de enero de 2013.

1. Estimar de forma aproximada el nivel de reservas del país a comienzos de noviembre de 2013.
2. Estimar de forma aproximada el nivel de reserva del país a comienzos del mes de mayo de 2014.
3. En el lapso de tiempo considerado, ¿cuántas veces el país cuenta con una reserva de 60.000 millones?

Ejercicio 4.
Sabiendo que las funciones f y g son polinómicas de segundo grado, calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura:



Ejercicio 5.
Consideremos dos sociedades, cada una de ellas con dos clases sociales claramente diferenciadas por sus ingresos.

En la sociedad H tenemos las clases H_1 y H_2. Dentro de cada una de ellas sus integrantes perciben todos el mismo ingreso. En la clase H_1 se encuentra el 50 % más pobre de la población y recibe en su conjunto el 25 % del ingreso total de la sociedad. En la clase H_2 se encuentra el 50 % restante de la población y recibe en su conjunto el 75 % del ingreso total de la sociedad.

En la sociedad U, por otra parte, tenemos las clases U_1 y U_2. Dentro de cada una de ellas sus integrantes perciben todos el mismo ingreso. En la clase U_1 se encuentra el 20 % más pobre de la población, el no recibe ningún ingreso. En la clase U_2 se encuentra el 80 % restante de la población y recibe en su conjunto el 100 % del ingreso total de la sociedad.

Se pide:

1. Determinar las funciones correspondientes a la curva de Lorenz de ambas sociedades y graficarlas. *(Sugerencia: el hecho de que en cada clase social todos perciban el mismo ingreso implica que la función va a ser lineal a tramos).*

2. Calcular el índice de Gini de las sociedades H y U.

3. Según el índice de Gini, ¿cuál de las sociedades tiene una distribución más equitativa de sus ingresos?

4. Compare los ingresos del 20 % más pobre de ambas sociedades. ¿Qué reflexión le merece?

Ejercicio 6.
En una escuela, los grupos de alumnos de 6 deciden recaudar fondos para realizar un viaje de fin de año. Dos meses antes de la finalización de las clases inician una campaña de recolección de fondos a base de venta de rifas, organización de festivales y venta de comida durante los recreos. Juan se encarga de la administración de las finanzas. Para entretenerse, resuelve registrar la tasa instantánea de cambio de los aportes. Descubre que la misma es una función continua del tiempo y que responde a la siguiente fórmula:

$$f(t) = \begin{cases} 6600t + 200 & si \quad t \in [0, 3] \\ -4000t + 32000 & si \quad t \in (3, 8] \end{cases}$$

donde t representa el tiempo transcurrido desde el inicio de la campaña (medido en semanas) y $f(t)$ se mide en pesos recaudados por semana.

Ayuda a Juan a calcular el monto total de fondos recaudados al finalizar la campaña.

Ejercicio 7.
Una compañía eléctrica ha propuesto construir una planta de energía nuclear en las afueras de una gran área metropolitana. Como cabe suponer, la opinión pública está dividida al respecto y se han suscitado acaloradas discusiones. Un grupo que se opone a la construcción de la planta ha ofrecido algunos datos discutibles sobre las consecuencias de un accidente catastrófico que pudiera ocurrir en la planta. El grupo estima que la velocidad a la que se producirían las muertes en la zona metropolitana por la precipitación radiactiva se describe por la siguiente función:

$$r : r(t) = 200000e^{-0,1t}$$

donde $r(t)$ representa la tasa de fallecimientos por hora y t representa el tiempo transcurrido desde el accidente, medido en horas.
Sabiendo que la población metropolitana se estima en 1,5 millones de personas, se pide:

1. Determine el número esperado de muertes 1 hora después de un gran accidente.

2. ¿Cuánto tiempo tardarán todos los habitantes de esa zona en sucumbir ante los efectos de la radiactividad?

Ejercicio 8.
Una corrida bancaria es una retirada masiva de depósitos de un banco. La siguiente función expresa la tasa instantánea de retiro de depósitos por hora en el caso que ocurra una corrida bancaria:

$$f : f(t) = 10t + 15$$

donde t es el tiempo (medido en horas) desde el comienzo de la corrida y $f(t)$ es el tasa de retiro de depósitos bancarios (expresada en miles de retiros por hora).
Se pide:

1. Calcular el número de retiros de depósitos bancarios realizados en la primera hora luego de iniciada la corrida.

2. La normativa del Banco Central establece que al llegar el número de retiros a 200.000, este suspenderá las operaciones de los bancos con sus clientes. ¿Cuánto tiempo tardará el Banco Central en tomar esta medida?