Solución repartido práctico Nº5: Cálculo integral

Matemática 2 - FCS - UDELAR

2024

Ejercicio 1.
Sea $k \in \mathbb{R}$, sustituyendo k por tres valores distintos es lo que nos da tres versiones de primitivas para cada función.

1. $F : F(x) = x^3 + 2x^2 + 10x + k$
2. $F : F(x) = e^x - \frac{3x^2}{2} + 5x + k$
3. $F : F(x) = ln|x| + x^2 + k$
4. $F : F(x) = 2\sqrt{x} + k$
5. $F : F(x) = \dfrac{e^{3x+2}}{3} - x + k$
6. $F : F(x) = 2ln|x-1| + k$
7. $F : F(x) = ln|x-1| - ln|x+2| + k$

Ejercicio 2.
Indicar, justificando, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Verdadero
2. Verdadero
3. Falso
4. Verdadero
5. Verdadero
6. Verdadero

Ejercicio 3.
En cada caso encontrar la función F primitiva de f, de forma tal que se cumplan las condiciones requeridas:

1. Primitiva: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x\dfrac{x^2}{2} + k$
   Luego $F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + k = 0$
   $$k = \frac{-5}{6}$$
   $$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + x\frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}$$

2. Primitiva: $F(x) = ln|x-2| + 3x + k$
   Luego $F(3) = 9 \Rightarrow ln|3-2| + 3.3 + k = 9$
   $$k = 0$$
   $$\Rightarrow F(x) = ln|x-2| + 3x$$

3. Primitiva: $F(x) = \dfrac{e^{-3x}}{-3} + x^2 + k$
   Luego $F(0) = 1 \Rightarrow \dfrac{e^{-3.0}}{-3} + 0^2 + k = 1$
   $$k = \frac{4}{3}$$
   $$\Rightarrow F(x) = \frac{e^{-3x}}{-3} + x^2 + \frac{4}{3}$$

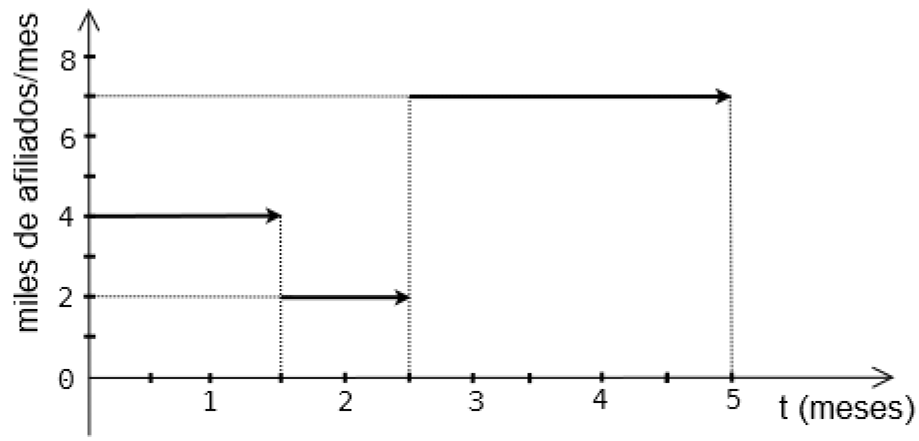
Ejercicio 4.
Se sabe que la función de Producto Marginal de una empresa que produce mermeladas es la siguiente:
$$PMa : (0, \infty) \leftarrow \mathbb{R} | PMa(x) = 210x^{-0,5}$$
donde x es la cantidad de horas de trabajo contratadas mensualmente y $PMa(x)$ está expresado en kg de mermelada.

1. $PMa(900) = 7$.

2. Al aumentar la cantidad de horas de trabajo contratadas de 900 a 901 horas, la producción de mermelada se incrementa aproximadamente en 7 kg.

3. $PT : PT(x) = 420x^{0,5} + 200$

Ejercicio 5.
Una mutualista A registra a partir de enero de 2015 la velocidad de afiliaciones y desafiliaciones (miles/mes) durante 5 meses, la cual se representa en el siguiente gráfico:



1. $f(t) = \begin{cases} 4 & si \quad 0 \leq t < 1,5 \\ 2 & si \quad 1,5 \leq t < 2,5 \\ 7 & si \quad 2,5 \leq x < 5 \end{cases}$

$$\int_0^{0,5} f(t)dt = \int_0^{0,5} 4dt = 4t|_0^{0,5} = 4(0,5) = 2$$

En total habrán $10000 + 2000 = 12000$ afiliados al 15/1/2015.

2. $$\int_1^{3,5} f(t)dt = \int_1^{1,5} 4dt + \int_{1,5}^{2,5} 2dt + \int_{2,5}^{3,5} 7dt = 4t|_1^{1,5} + 2t|_{1,5}^{2,5} + 7t|_{2,5}^{3,5} = 11$$

Las afiliaciones netas en este período fueron 11000.

3. Al 1 de enero hay 10000 afiliados, por lo que se debe hallar $F(t) = 4,5$. Sabemos que al final del primer tramo se alcanzan los 6000 afiliados nuevos ($F(1,5) = \int_0^{1,5} 4dt = 4t|_0^{1,5} = 4(1,5) = 6$). Entonces planteamos $F(x) = 6$ y hallamos en el primer tramo.

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 4dt = 4t|_0^x = 4x$$

$$\Rightarrow 4x = 4,5 \Leftrightarrow x = 1,125$$

Si multiplicamos por 30 (días en el mes), tenemos que a los $33,75$ días (3 de febrero de 2015) se llega a 4500 afiliados netos y a 14500 afiliados.

4. Calculamos cuando se alcanzan las 11000 afiliaciones netas.

- En el primer tramo se alcanzan 6000 afiliados.
- En el segundo tramo se alcanzan 2000.

$$\int_{2,5}^x 7dt = 7x|_{2,5}^x = 7x - 17,5 \Rightarrow 7x - 17,5 = 3 \Rightarrow x = 2,928$$

Multiplico por 30 y entonces los días son 87,86 (última semana de marzo).

5. $g(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 4 & si \quad 1 \leq t < 2 \\ -3 & si \quad 2 \leq t < 3,5 \\ 7 & si \quad 3,5 \leq t < 4,5 \\ -4 & si \quad 4,5 \leq t \end{cases}$

$$\int_0^1 1dt + \int_1^2 4dt + \int_2^{2,5} -3dt = t|_0^1 + 4t|_1^2 - 3t|_2^{2,5} = 3,5$$

La mutualista B tiene 20000+3500=23500 afiliados a mediados de marzo de 2015.

6.
$$\int_2^4 g(t)dt = \int_2^{3,5} -3dt + \int_{3,5}^4 7dt = -3t|_2^{3,5} + 7t|_{3,5}^4 = -1$$

El saldo neto en el período es de -1000 afiliados.

7.
$$\int_{0,5}^{3,5} g(t)dt = \int_{0,5}^1 1dt + \int_1^2 4dt + \int_2^{3,5} -3dt = t|_{0,5}^1 + 4t|_1^2 - 3t|_2^{3,5} = 0$$

8. Debemos hallar $G(x) = 6$.

$$\int_0^1 1dt + \int_1^2 4dt + \int_2^{3,5} -3dt + \int_{3,5}^x 7dt = t|_0^1 + 4t|_1^2 - 3t|_2^{3,5} + 7t|_3^x, 5 = 7x - 24$$

$$7x - 24 = 6 \Rightarrow x = 4,285$$

Se alcanzan los 26000 afiliados a comienzo de la segunda semana de mayo.

Ejercicio 6.
Calcular las siguientes integrales:

1. $\int_1^3 (6x^2 + 3x - 2)dx = [2x^3 + \frac{3x^2}{2} - x]_1^3 = 60$
2. $\int_0^2 3x^3 - 2x + 10dx = [\frac{3x^4}{4} - x^2 + 10x]_0^2 = 28$
3. $\int_{-1}^2 4x^2 + 3x - 1dx = [\frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x] = 13,5$
4. $\int_1^e \dfrac{3}{x}dx = 3[ln|x|]_1^e = 3$
5. $\int_{-2}^0 \dfrac{2}{x-1}dx = [2ln|x-1|]_{-2}^0 = -2ln(3)$
6. $\int_{-3}^3 e^{x+2} + 2x - 1dx = [e^{x+2} + x^2 - x]_{-3}^3 = e^5 - e^{-1} - 6$

7. $\int_1^4 \dfrac{1}{x^3}dx = [-\frac{1}{2x^2}]_1^4 = \frac{15}{32}$

8. $\int_1^4 \dfrac{3}{x^4} + 5xdx = [-x^{-3} + 5\frac{x^2}{2}]_1^4 = 38,48$

9. $\int_2^3 \dfrac{2}{\sqrt{x}}dx = [2\dfrac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}]_2^3 = 4[\sqrt{x}]_2^3 = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

10. $\int_0^2 \dfrac{1}{3x+4}dx = [\frac{1}{3}ln|3x+4|]_0^2 = \dfrac{ln(10) - ln(4)}{3}$

11. Se halla la raíz de la función y se evalúa el signo de f(x) a cada lado de las raíces. $g(t) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x < 2 \\ \\ x-2 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ $\int_{-1}^3 |x-2|dx = \int_{-1}^2 -x + 2dx = \int_2^3 x - 2dx =$ $[\frac{-x^2}{2} - 2x]_{-1}^2 + [\frac{x^2}{2} - 2x]_2^3$

12. Se halla la raíz de la función y se evalúa el signo de f(x) a cada lado de las raíces. Raíces 1 y -2

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{2} |x^2 + x - 2|dx &= \int_{-3}^{-2} x^2 + x - 2dx + \int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2dx + \int_{1}^{2} x^2 + x - 2dx \\ &= [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x]_{-3}^{-2} + [\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x]_{-2}^{1} + [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x]_{2}^{1} \\ &= \frac{49}{6}\end{aligned}$$

13. $\int_2^4 \dfrac{3x^5 + 4x^4 - x^3}{x^2}dx = \int_2^4 3x^3 + 4x^2 - xdx = [\frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}]_2^4 = \frac{746}{3}$

Ejercicio 7.

1. Consideremos una primitiva de la función VA:

$$F(t) = \frac{100}{3}t^3 - 350t^2 + 1000t$$

entonces tenemos que

$$\int_0^1 VA(t)dt = F(1) - F(0) \approx 683$$

$$\int_0^4 VA(t)dt = F(4) - F(0) \approx 533$$

El saldo neto de afiliaciones en el primer mes de 2020 es de aproximadamente 683. El saldo neto de afiliaciones durante los primeros 4 meses del 2020 es de aproximadamente 533.

2. La función VA tiene raíces $t = 2$ y $t = 4$, por lo tanto su diagrama de signo es

$$\begin{array}{r|cccccccc} & \nexists & & + & 0 & - & 0 & + \\ sg\ VA(t) & & 0 & & 2 & & 5 & \end{array}$$

   Por lo tanto, el club perderá afiliados desde comienzos de Marzo hasta fines de Mayo.

3. $\int_2^5 VA(t)dt = F(5) - F(2) = -450$ por lo tanto las desafiliaciones seran 450.

Ejercicio 8.
Una empresa se instala en Uruguay a comienzos del 2019 y luego de un análisis de mercado, realiza una proyección de la evolución de su tasa de utilidades a lo largo del tiempo. Dicha proyección se expresa a través de la función

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / g(t) = \frac{1}{10} - 3e^{-t}$$

donde $g(t)$ representa la tasa instantánea de utilidades (en millones de dolares/mes) t meses a partir de enero de 2019 ($t = 0$ comienzos de enero).

Se pide:

1. Calcular el saldo neto de utilidades de la empresa durante enero de 2019. Idem para junio de 2019.
   La función $G(t) = \frac{1}{10}t + 3e^{-t}$ es una primitiva de g, por lo tanto
   - Tenemos que $\int_0^1 g(t)dt = G(1) - G(0) \approx -1{,}796$, entonces el saldo neto de utilidades en enero es de aproximadamente 1.796.000 dolares de perdidas.
   - Tenemos que $\int_5^6 g(t)dt = G(6) - G(5) \approx 0{,}087$, entonces el saldo neto de utilidades en junio es de aproximadamente 87.000 dolares de ganancias.

2. ¿En qué mes la tasa instantánea de utilidades vale 0?

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 \\ \frac{1}{10} - 3e^{-t} &= 0 \\ e^{-t} &= \frac{1}{30} \\ t &= -ln(\frac{1}{30}) \\ t &\approx 3{,}4 \end{aligned}$$

3. ¿Cual es el saldo neto de pérdidas que el modelo predice que ocurrirá durante el año 2019?

$$
\begin{array}{l|ccccc}
 & \nexists & & - & 0 & + \\
sg\ g(t) & & 0 & & 3{,}4 & \rightarrow
\end{array}
$$

$$\int_0^{3,4} g(t)dt = G(3{,}4) - G(0) \approx -2{,}56$$

Las perdidas netas durante el 2019 son aproximadamente 2,56 millones de dolares.

4. Supongamos que la empresa comienza sus negocios disponiendo de un fondo de 5 millones de dolares. Dar una expresión para la función $F(t)$ que describe los fondos que dispone la empresa t meses a partir de enero de 2019.

$$
\begin{aligned}
F(t) &= 5 + \int_0^t g(x)dx \\
&= 5 + G(t) - G(0) \\
&= 5 + \frac{1}{10}t + 3e^{-t} - (\frac{1}{10}.0 + 3e^0) \\
&= \frac{1}{10}t + 3e^{-t} + 2
\end{aligned}
$$

5. ¿Que predice el modelo que sucederá con los fondos de la empresa en el largo plazo?

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{10}t + 3e^{-t} + 2 = +\infty$$

El modelo predice que los fondos de la empresa tenderán a $+\infty$ y por lo tanto crecerán sin techo.

Ejercicio 9.

1. $M'(t) = 3t^2.\, e^{\frac{-t}{60}} + e^{\frac{-t}{60}}\dfrac{-1}{60}t^3 = e^{\frac{-t}{60}}t^2(3 - \dfrac{t}{60})$

$$
\begin{array}{l|ccccc}
 & + & 0 & + & 0 & - \\
sg(M'(t)) & & 0_{(2)} & & 180 & \rightarrow
\end{array}
$$

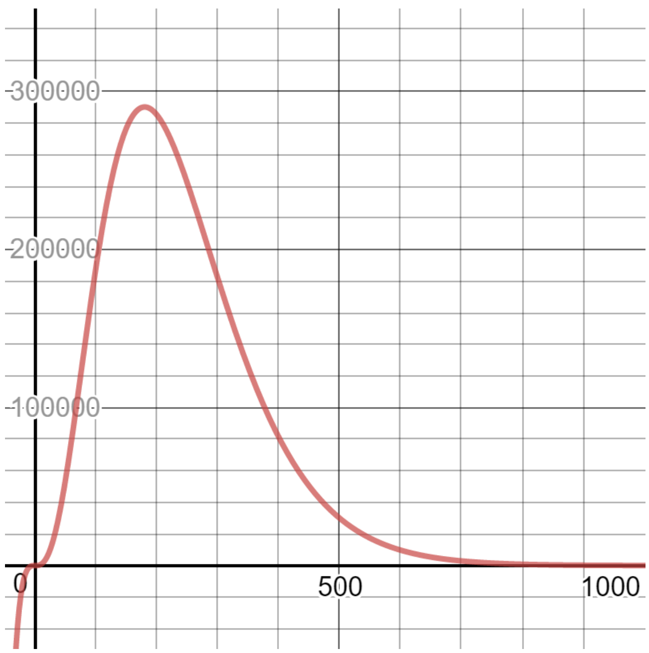
$$M(180) = 180^3.\, e^{\frac{-180}{6}} \approx 290.358$$

2. ▪

$$
\begin{array}{l|ccc}
 & - & 0 & + \\
sg(M(t)) & & 0_{(3)} & \rightarrow
\end{array}
$$

- $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^3}{e^{\frac{t}{60}}} = 0^+$
- Como la función está definida en [0,1440], el límite en $-\infty$ no hace falta calcularlo.
- $M'(t) = e^{\frac{-t}{60}} t^2 (3 - \dfrac{t}{60})$
- $M''(t) = e^{\frac{-t}{60}} t^2 \left(3 - \dfrac{t}{60}\right)\left(\dfrac{-1}{60}\right) + e^{\frac{-t}{60}}\left(3t - 3\dfrac{t^2}{60}\right) = e^{\frac{-t}{60}} \dfrac{t}{60}\left(\dfrac{t^2}{60} - 6t + 360\right) \Rightarrow$ $t \approx 76$ y $t \approx 283$

$$sg(M''(t)) \quad \begin{array}{ccccccc} - & 0 & + & 0 & - & 0 & + \\ \hline & 0 & & 76 & & 283 & \end{array}$$

- 

3. $(e^{\frac{-t}{60}}(-60t^3 - 10800t^2 - 1296000t - 77760000))' = e^{\frac{-t}{60}} \dfrac{-1}{60}(-60t^3 - 10800t^2 - 1296000t - 77760000) + e^{\frac{-t}{60}}(-180t^2 - (2)10800t - 1296000) = t^3 e^{\frac{-t}{60}}$ es una primitiva de $M(t)$.

4. $\int_0^{1440} M(t)dt = [e^{\frac{-t}{60}}(-60t^3 - 10800t^2 - 1296000t - 77760000)]^1 440_0 = 77759998$

5. Es el total del dinero movilizado en todo un día.

Ejercicio 10. 1. Para determinar cuántas horas de producción son necesarias para producir la décima unidad, cuando se está en proceso de aprendizaje solamente alcanza con calcular el valor de la función de aprendizaje en $x = 10$.

$$h(10) = \frac{20}{10} + 40 = 42$$

Por lo tanto, se necesitan 42 horas para producir la décima unidad.

2.
$$TIC(x) = h'(x) = -\frac{20}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} h'(x=1) = -\frac{20}{1^2} = -20 \\ h'(x=10) = -\frac{20}{5^2} = -0{,}2 \end{cases}$$

Interpretación dinámica: por cada unidad que aumenta la producción cuando ya se produce 1 unidad, la curva de aprendizaje disminuye en aproximadmente 20 horas. Esto significa que la persona aprende mucho cuando realiza la primer unidad y se hace cada vez más productiva y necesita menos tiempo por unidad adicional que produce. Esto lo vamos cuando calculamos la $TIC(x = 10) = -0{,}2$. Cuando se llegaron a producir las primeras 10 unidades el trabajador aprendió mucho y para producir la siguiente unidad puede disminuir el tiempo que le lleva en solamente 0.2 horas (12 minutos).

Interpretación geométrica: -20 es la pendiente de la recta tangente al gráfico de $h(x)$ en el punto $x = 1$ y -0.2 es la pendiente de la recta tangente al gráfico de $h(x)$ en el punto $x = 10$.

3. La función h es continua y está definida en el intervalo $[1, +\infty)$. Por un lado tenemos que $h(1) = 60$ y por otro sabemos que su derivada es siempre negativa, por lo tanto la función es decreciente y está acotada superiormente por 60.
Para determinar si la función está acotada inferiormente debemos calcular el límite de la curva de aprendizaje cuando tiende a infinito la cantidad de unidades producidas:
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{20}{x}}_{\to 0} + 40 = 40$$
Por lo tanto, cuando aumenta mucho la producción, la curva de aprendizaje está acotada inferiormente por 40. Esto quiere decir que la cantidad de horas que se necesitan para producir una unidad del bien siempre será mayor a 40 horas. A medida que la cantidad de unidades producidas por el trabajador aumenta, el trabajador adquiere más experiencia y está cada vez más cerca de producir una unidad del bien en 40 horas.

4.
$$\int_1^{20} h(x)dx = \int_1^{20} \left(\frac{20}{x} + 40\right) dx \Rightarrow \text{ Aplicando regla de Barrow:}$$
$$[20\ln(x) + 40x] |_1^{20} = 20\ln(20) + 40x - 20\ln(1) - 40(1) =$$
$$= 20\ln(20) + 800 - 40 = 20\ln(20) + 760$$

Ejercicio 11.

1.
$$f(t) = 300.e^{0{,}1t}$$
$$f(2) = 300.e^{0{,}1(2)} = 366{,}4$$

Entre el mes 2 y el mes 3, la variación en la cantidad de detenidos es de aproximadamente 366 personas.

2.

$$\int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 300.e^{0,1t}dt = \left[3000e^{0,1t}\right]\Big|_0^6 = 2466{,}35$$

Según este modelo, el MI suspenderá el próximo campeonato.

3.

$$\begin{aligned} 1500 &= \int_0^k f(t)dt \\ &= \int_0^k 300.e^{0,1t}dt \\ &= \left[3000e^{0,1t}\right]\Big|_0^k \\ &= \left[3000e^{0,1(k)} - 3000e^{0,1(0)}\right] \\ 1500 &= 3000[e^{0,1(k)} - 1] \\ 0{,}5 &= e^{0,1(k)} - 1 \\ &\Rightarrow \ln(e^{0,1(k)}) = \ln(1{,}5) \Rightarrow 0{,}1k = 0{,}4055 \Rightarrow k \approx 4{,}055 \end{aligned}$$

A los 4 meses y un día de comenzado el campeonato se llenarán las cárceles.

Ejercicio 12.

1. $\int_4^{10} f(x)dx = \int_1^{10} f(x)dx - \int_1^4 f(x)dx = 20 - (-15) = 35$
2. Podemos decir que en algún momento f toma valores negativos en ese intervalo.

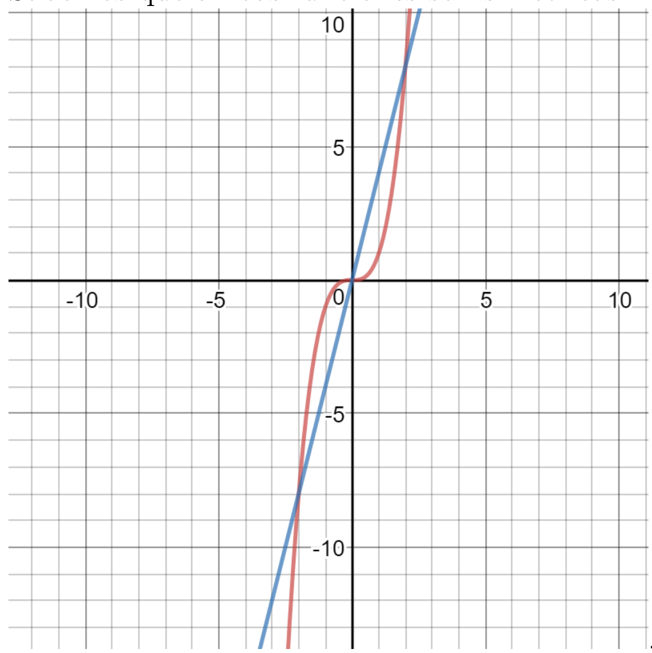
Ejercicio 13.
La afirmación es falsa. Por ejemplo, si consideramos la función $f : f(x) = x$ en el intervalo $[-1, 1]$, se cumple que $\int_{-1}^1 xdx = 0$ y, sin embargo, la función toma valores distintos de 0 en dicho intervalo.

Ejercicio 14.

1. $\int_0^4 x^3 - 4xdx$ Sabemos que $x^3 - 4x$ tiene como raíces: -2, 0 y 2. Luego, $x^3 - 4x > 0$ si $x \in (2, 4)$ y $x^3 - 4x < 0$ si $x \in (0, 2)$. Entonces,

$$\int_0^4 x^3 - 4xdx = \int_0^2 -x^3 + 4xdx + \int_2^4 x^3 - 4xdx = [\frac{-x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}]_0^2 + [\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}]_2^4 = 4 + 36 = 40$$

2. Sabemos que ambas funciones son simétricas.



.

Entonces el área entre ambas gráficas es la misma. Por lo tanto el área es igual: 40.

Ejercicio 15.

1. Sabemos que

$$D(0) = a.\,0^2 + b.\,0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$D(1) = a.\,1^2 + b.\,1 + c = 0 \Rightarrow a + b = 1$$

Luego, si $b \not 0$, hay más de una raíz. Entonces, $b = 0$ y $a = 1$.

$$\Rightarrow D(x) = x^2$$

Sabemos que

$$E(0) = a.\,0^4 + b.\,0^3 + c.\,0^2 + d.\,0 + e = e = 0$$

$$E(1) = a.\,1^4 + b.\,1^3 + c.\,1^2 + d.\,1 + e = a + b + c + d = 1$$

Hay solo una raíz si $a = 1$

$$\Rightarrow E(x) = x^4$$

2.
   - $D(0,2) = 0,04 \Rightarrow$ El 20 % más pobre acumula el 4 % del ingreso.
   - $1 - D(0,8) = 1 - 0,64 = 0,36 \Rightarrow$ El 20 % más rico acumula el 36 % del ingreso.
   - $E(0,2) = 0,0016 \Rightarrow$ El 20 % más pobre acumula el 0,16 % del ingreso.
   - $1 - D(0,8) = 1 - 0,4096 = 0,5904 \Rightarrow$ El 20 % más rico acumula el 59,04 % del ingreso.

3.
$$IG_D = 2\int_0^1 x - x^2 dx = 2[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$IG_E = 2\int_0^1 x - x^4 dx = 2[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}]_0^1 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.

1. $3x + k$
2. $x^2 + k$
3. $\frac{3x^2}{2}3x - 2x + k$
4. $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 6x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{-1}{2}} + k$
5. $x^2 + 4x + \frac{3}{x} + k$
6. $\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + k$
7. $\frac{2x^5}{5} + \frac{3}{x} + k$
8. $-\frac{x^{-2}}{2} + k$
9. $4ln|x| + k$
10. $ln|x+2| + k$
11. $2ln|x-1| + k$
12. $2x^4 - \frac{e^{4x}}{2} + k$
13. $e^x - \frac{e^{-2x}}{2} + k$

Ejercicio 2.
$F'(x) = x^3 - e^x - 2x + q$
$F'(0) = 0^3 - e^0 - 2.0 + q = 1 \Rightarrow -1 + q = 1 \Rightarrow q = 2$
$F(x) = \frac{x^4}{4} - e^x - x^2 + 2x + k$
$F(0) = \frac{0^4}{4} - e^0 - 0^2 + 2.0 + k = 1 \Rightarrow -1 + k = 1 \Rightarrow k = 2$ $F(x) = \frac{x^4}{4} - e^x - x^2 + 2x + 2$

Ejercicio 3.

1. Lo que debemos calcular es
$$5000 + \int_0^{10} f(t)dt$$
Podemos obtener un valor aproximado de la integral considerando rectángulos de base 1 y altura apropiada y calculando la suma de sus áreas. Así, se obtiene que el nivel de reservas a comienzos de noviembre de 2013 es por defecto:
$$5000 + \int_0^{10} f(t)dt \approx 66500$$
De la misma manera, se obtiene que el nivel de reservas a comienzos de noviembre de 2013 es por exceso:
$$5000 + \int_0^{10} f(t)dt \approx 71000$$
El valor exacto de las reservas se halla entre uno y otro valor aproximado (entre 66.500 y 71.000 millones de dólares).
2. El volumen de reservas a comienzos de mayo de 2014 se calcula como
$$5000 + \int_0^{16} f(t)dt \approx 66500$$
Por el mismo razonamiento aplicado en la parte anterior puede obtenerse una aproximación a dicho valor. El valor exacto de las reservas se halla entre 47.000 y 56.000 millones de dólares.
3. En dos veces

Ejercicio 4.

- $f(x) = -2x^2 + 2$
- $g(x) = 3x^2 - 3$
- $\int_{-1}^{1} f(x) - g(x)dx = \frac{20}{3}$

Ejercicio 5.

1. Sabemos que H(0)=0 y H(0,5)=0,25. Además, como todos los integrantes de H1 cobran lo mismo, H(x) necesariamente va a ser una función lineal en el intervalo . La función cuyo gráfico pasa por los puntos (0 ; 0) y (0,5 ; 0,25) es Por otro lado H(1)=1 y H(0,5)=0,25. Razonamos de forma análoga al primer tramo. Como todos los integrantes de H2 cobran lo mismo, tenemos que el gráfico de H en el intervalo es también una recta que pasa por los puntos (0,5 ; 0,25) y (1 ; 1). Eso nos lleva a la función

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad x \in [0; 0,5] \\ \frac{3x}{2} - 0,5 & si \quad x \in (0,5; 1] \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0; 0,2] \\ \frac{4x}{4} - 0,25 & si \quad x \in (0,2; 1] \end{cases}$$

2. $Gini_H = 0,25$ y $Gini_U = 0,20$

3. Según el índice de Gini, la sociedad U es más equitativa en la distribución de su ingreso.

4. En la sociedad H el 20 % de menores ingresos recibe el 10 % del ingreso total de la sociedad, mientras que en U el 20 % de menores ingresos no recibe ingresos.

   El índice de Gini calculado anteriormente recibe el nombre de índice sintético de Gini y mide la desigualdad en la distribución del ingreso en forma global, sin ponderar ningún sector en particular. Si se desea focalizar la atención en algún sector de la población en particular, se vuelve necesario contar con herramientas complementarias que permitan un análisis más detallado.

Ejercicio 6.
En una escuela, los grupos de alumnos de 6 deciden recaudar fondos para realizar un viaje de fin de año. Dos meses antes de la finalización de las clases inician una campaña de recolección de fondos a base de venta de rifas, organización de festivales y venta de comida durante los recreos. Juan se encarga de la administración de las finanzas. Para entretenerse, resuelve registrar la tasa instantánea de cambio de los aportes. Descubre que la misma es una función continua del tiempo y que responde a la siguiente fórmula:

$$f(t) = \begin{cases} 6600t + 200 & si \quad t \in [0, 3] \\ -4000t + 32000 & si \quad t \in (3, 8] \end{cases}$$

donde t representa el tiempo transcurrido desde el inicio de la campaña (medido en semanas) y $f(t)$ se mide en pesos recaudados por semana.

Ayuda a Juan a calcular el monto total de fondos recaudados al finalizar la campaña.

Ejercicio 7.

1. $\int_0^1 r(t)dt = 190325,16$
2. $$\int_0^b r(t)dt = 1500000$$
$$e^{-0,1b} = 1 - 0,75 = 0,25$$
$$-0,1b = ln(0,25)$$
$$b = -10.\, ln(0,25) = 13,86$$

Ejercicio 8.

1. Número de retiros en la primera hora $= \int_0^1 (10t + 15)dt = [5t^2 + 15t]_0^1 = 20$ (20000 retiros)
2. $\int_0^x (10t + 15)dt = 200 \Leftrightarrow [5t^2 + 15t]_0^x = 200 \Leftrightarrow 5x^2 + 15 - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ o $x = -8$
Pasadas 5 horas desde el inicio de la corrida, el Banco Central suspenderá las operaciones de los bancos.