Repartido práctico Nº6: Optimización de funciones de varias variables

Matemática para las Ciencias Sociales - FCS - UDELAR

2024

Ejercicio 1.

En los siguientes casos, hallar el valor de la función en los puntos indicados.

Función	Punto
$f(x,y) = 3x - 4y^2 + 5$	$(2,-1)$
$g(x,y,z) = (2x+3y).\, e^z$	$(1,2,0)$
$h(t,u) = e^{2t} - e^{-u}$	$(\frac{1}{2},-2)$
$i(x,y,z) = \dfrac{x^2-y^2}{xy-z^3}$	$(-1,1,-2)$

Ejercicio 2.

Despejar y en función de x y bosquejar en el plano (x,y) las curvas de nivel de las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para los siguientes valores funcionales:

1. $f : f(x,y) = x + y - 2$ en los valores funcionales 0 y 2
2. $f : f(x,y) = x^2 + 4y$ en los valores funcionales 0 y en 4

Ejercicio 3.

En cada uno de los siguientes casos calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden respecto de cada una de las variables.

1. $f(x,y) = 3x^2 - 4y^4 + 5y - 8$
2. $f(x,y) = 6xy - y^2 + 2y$
3. $f(x,y) = e^x - e^{-x} + 4y$
4. $f(x,y) = 5.\, x^{0,2}.\, y^{0,8}$
5. $f(x,y) = ln(x^2 + y^3)$
6. $f(x,y) = e^{x \cdot y} + 3y^2$

Ejercicio 4.

Consideremos la siguiente función de demanda:

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 25000 - 0{,}1p_1^2 - 0{,}5p_2^2$$

donde p_1 es el precio del bien 1, p_2 es el precio del bien 2 y q_1 es la demanda del bien 1.

1. Determine las derivadas parciales f_{p_1} y f_{p_2}.
2. Si $p_1 = 20$ y $p_2 = 10$, evalúe f_{p_1} y f_{p_2} e interprete el resultado obtenido.
3. ¿Cómo se interrelacionan los dos productos entre sí? De un ejemplo de dos productos que se relacionen de esta forma.

Ejercicio 5.

Sea:

$$f : f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 4y^3 + 5x^2y - 4$$

Calcular todas las derivadas parciales de segundo orden de la función f y construir su matriz Hessiana.

Ejercicio 6.

1. Hallar los puntos estacionarios de las siguientes funciones.
2. Decidir si se trata de puntos de máximos o mínimos relativos, o puntos de silla.
   a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 4y$
   b) $f(x,y) = xy - 2y^2 + 2y$
   c) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1$

Ejercicio 7.

Localizar y clasificar los puntos estacionarios de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$
2. $f(x,y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$
3. $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$
4. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Ejercicio 8. Sea la función f tal que $f(x,y) = ax^2 + bxy^2 + 3y^2 - 10x$

1. Determinar los números reales a y b de forma tal que (5,0) y (-1,2) sean puntos estacionarios de f.
2. Clasificar los puntos estacionarios de f hallados.

Ejercicio 9. El inicio de actividades de la empresa Uber en Uruguay ha afectado el funcionamiento del mercado de transporte, en particular el de los taxis, haciendo que la función de demanda de servicios de taxis sea la siguiente:

$$f : f(x,y) = 4000 - 200x + 30y + 20x^2 + 30xy$$

donde: x es el precio (en pesos) cobrado por un taxi cada 100 metros recorridos; y es el precio (en pesos) cobrado por un coche Uber por cada 100 metros recorridos; $f(x,y)$ es la cantidad diaria demandada de servicios de taxi.

1. Calcular la cantidad diaria demandada de servicios de taxi para un precio del taxi de \$2 por cada 100 metros recorridos y un precio del coche Uber de \$1,75 por cada 100 metros recorridos.
2. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2;1,75)$ e interpretar el resultado en el contexto de la situación del ejercicio.
3. Indicar, justificando, si el punto $f(3,4)$ es un punto estacionario de f.

Ejercicio 10.

Un niño tiene 150 pesos para gastar en entre caramelos y chocolate. Cada gramo de chocolate sale 3 pesos y cada gramo de caramelo sale 2 pesos. Cada opción del niño puede ser representada por un par ordenado (gr chocolate, gr caramelo), por ej (0,50), (10, 35).
Describir el conjunto de posibilidades del consumidor en este caso, representandolo como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y suponiendo que el niño gasta todo su dinero.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.

En cada uno de los siguientes casos calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden respecto de cada una de las variables.

1. $f(x, y) = 5xy - 4x + 1$
2. $f(x, y) = 2x^3 + 4y - 4xy + 10x$
3. $f(x, y) = \frac{1}{x}(y^2 + 3y)$
4. $f(x, y) = e^{2x} ln(y)$
5. $f(x, y) = \frac{-x}{y^3}$
6. $f(x, y) = x^3 - e^{3x-2y}$

Ejercicio 2.

1. Hallar los puntos estacionarios de las siguientes funciones.
2. Decidir si se trata de puntos de máximos o mínimos relativos, o puntos de silla.
   a) $f(x, y) = y - y^2 - 3x - 6x^2$
   b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x^3$
   c) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

Ejercicio 3.

Un programa desarrollado por el gobierno de Pocosano busca minimizar el tiempo de espera para una consulta con un médico especialista. Para eso han contratado un licenciado en estadística que analizó los sistemas de salud en varios países y encontró que el tiempo promedio de espera (en días) depende de dos variables:

- La cantidad de médicos cada 1.000 habitantes (x).

- El gasto mensual per cápita (en dólares) en información relacionada a temas de salud (y).

El modelo que describe esta relación es: $f(x, y) = \alpha x^2 + \frac{y^2}{2} - xy - 9x + \frac{\beta}{2}$

Se pide:

1. Determine los valores de α y β sabiendo que: (3,3) es un punto estacionario, y que el tiempo promedio de espera para un especialista es de 9 días, si hay 3 médicos por cada 1000 habitantes y el gasto mensual per cápita en información relacionada a temas de salud es de 3 dólares.

2. Clasifique el punto estacionario.

3. Calcule $f_y(5,4)$ e interprete ese resultado obtenido.