Solución repartido práctico N$^{\underline{o}}$6: Optimización de funciones de varias variables

Matemática para las Ciencias Sociales - FCS - UDELAR

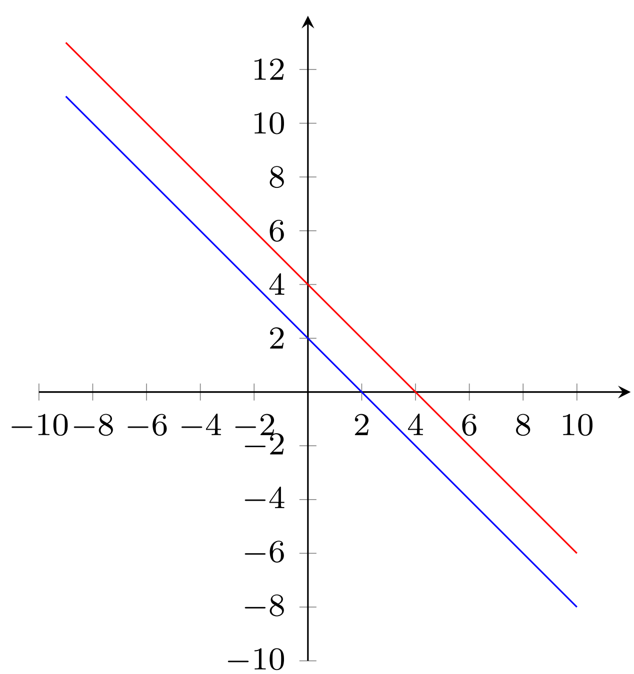
2024

Ejercicio 1.

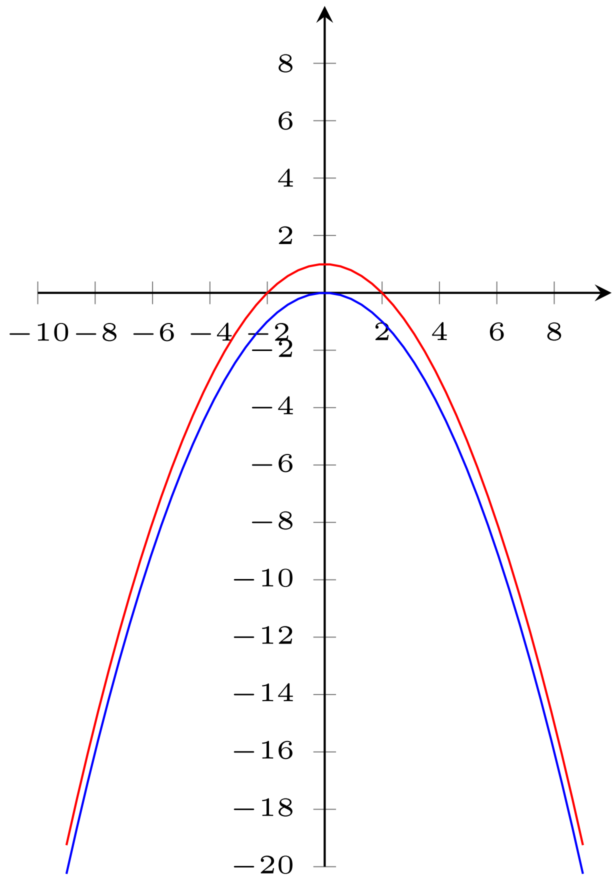
$$f(2,-1) = 3(2) - 4(-1)^2 + 5 = 7$$
$$g(-1,2,0) = (2(1) + 3(2))e^0 = 8$$
$$h(1/2,-2) = e - e^2$$
$$i(-1,1,-2) = \frac{(-1)^2 - (1)^2}{-1(1) - (2)^3} = \frac{0}{9} = 0$$

Ejercicio 2.

1. $f : f(x,y) = x + y - 2$



2. $f : f(x,y) = x^2 + 4y$



Ejercicio 3.

1. $f_x = 6x$
   $f_y = -16y^3 + 5$
2. $f_x = 6y$
   $f_y = 6x - 2y + 2$
3. $f_x = e^x + e^{-x}$
   $f_y = 4$
4. $f_x = x^{-0,8}y^{0,8} = \left(\frac{y}{x}\right)^{0,8}$
   $f_y = 4x^{0,2}y^{-0,2} = 4\left(\frac{x}{y}\right)^{0,2}$
5. $f_x = \frac{2x}{x^2+y^3}$
   $f_y = \frac{3y^2}{x^2+y^3}$
6. $f_x = ye^{xy}$
   $f_y = xe^{xy} + 6y$

Ejercicio 4.

1. - $f_{p_1}(p_1, p_2) = 2(-0,1)p_1 = -0,2p_1$
   - $f_{p_2}(p_1, p_2) = 2(-0,5)p_2 = -p_2$

2. - $f_{p_1}(20, 10) = -0,2(20) = -4 \Rightarrow$ Si el precio del bien dos se mantiene fijo en 10 pesos y el del bien 1 aumenta de 20 a 21 entonces la cantidad demandada del bien 1 disminuirá en aproximadamente 4 unidades.
   - $f_{p_2}(20, 10) = -10 \Rightarrow$ Si el precio del bien 1 se mantiene fijo en 20 pesos y el precio del bien 2 aumenta de 10 a 11, entonces la demanda del bien 1 disminuirá aproximadamente en 10 unidades.

3. El precio del producto 2 afecta negativamente a la cantidad demandada del producto 1. Esto pasa cuando los bienes son complementarios. Por ejemplo, si sube el precio de los panchos es esperable que baje la cantidad demandada de panes de pancho.

Ejercicio 5.

Derivadas de primer orden:

$$f_x = 6x - 6y - 10xy$$
$$f_y = -6x - 12y^2 + 5x^2$$

Derivadas de segundo orden:

$$f_{xx} = 6 - 10y$$
$$f_{xy} = f_{yx} = -6 - 10x$$
$$f_{yy} = -24y$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 + 10y & -6 + 10x \\ -6 + 10x & -24y \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.

1. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6x + 4y$

   a) Derivadas primeras:

$$f_x(x, y) = 2x + 6$$
$$f_y(x, y) = 8y + 4$$

b) Formamos el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 6 =& 0 \Rightarrow x = -3 \\ 8y + 4 =& 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x = -3$ y $y = -\dfrac{1}{2}$ es el único punto estacionario.

c) Luego encontramos derivadas segundas para evaluarlas en el punto estacionario y determinar el signo del determinante de la matriz Hessiana a fin de clasificarlos.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}\left(-3, -\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

$\det[H]_{f\left(-3,-\frac{1}{2}\right)} = 2.8 - 0 = 16 > 0.$
$\Rightarrow$ Entonces la función presenta un <u>mínimo relativo</u> en el punto estacionario $\left(-3, -\dfrac{1}{2}\right)$.

2. $f(x, y) = xy - 2y^2 + 2y$

a) Derivadas primeras:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) =& y \\ f_y(x, y) =& x - 4y + 2 \end{aligned}$$

b) Formamos el sistema:

$$\begin{aligned} y =& 0 \Rightarrow y = 0 \\ x - 4y + 2 =& 0 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$x = -2$ y $y = 0$ es el único punto estacionario.

c) Luego encontramos derivadas segundas para evaluarlas en el punto estacionario y determinar el signo del determinante de la matriz Hessiana a fin de clasificarlos.

$$f_{xx}(x, y) = 0 \Rightarrow f_{xx}(-2, 0) = 0$$

$\det[H]_{f(-2,0)} = 0.(-4) - 1.1 = -1 < 0.$
$\Rightarrow$ Entonces la función presenta un <u>punto de silla</u> en el punto estacionario $(-2, 0)$.

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1$

a) Derivadas primeras:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) =& 2x + y - 9 \\ f_y(x, y) =& 2y + x \end{aligned}$$

b) Formamos el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y - 9 =& 0 \\ 2y + x =& 0 \end{aligned}$$

$x = 6$ y $y = -3$ es el único punto estacionario.

c) Luego encontramos derivadas segundas para evaluarlas en el punto estacionario y determinar el signo del determinante de la matriz Hessiana a fin de clasificarlos.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{xx}(6, -3) = 2 > 0$$

$\det[H]_{f(6,-3)} = 2.2 - 1.1 = 3 < 0.$
$\Rightarrow$ Entonces la función presenta un mínimo relativo en el punto estacionario $(6, -3)$.

Ejercicio 7. Localice los puntos estacionarios de las siguientes funciones y determine la naturaleza de los mismos:

1. $f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$

a) Derivadas primeras:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) =& 8x - 12 \\ f_y(x, y) =& 2y + 2 \end{aligned}$$

b) Formamos el sistema:

$$\begin{aligned} 8x - 12 =& 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2y + 2 =& 0 \Rightarrow y = -1 \end{aligned}$$

$x = \frac{3}{2}$ y $y = -1$ es el único punto estacionario.

c) Luego encontramos derivadas segundas para evaluarlas en el punto estacionario y determinar el signo del determinante de la matriz Hessiana a fin de clasificarlos.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) =& 8 \Rightarrow f_{xx}\left(\frac{3}{2}, -1\right) = 8 > 0 \\ f_{yy}(x, y) =& 2 \Rightarrow f_{yy}\left(\frac{3}{2}, -1\right) = 2 > 0 \\ f_{yx}(x, y) =& f_{xy}(x, y) = 0 \end{aligned}$$

$\det[H]_{f(6,-3)} = 8.2 - 0.0 = 16 > 0.$
$\Rightarrow$ Entonces la función presenta un mínimo relativo en el punto estacionario $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$.

2. $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$

   a) Derivadas primeras:

   $$\begin{aligned} f_x(x, y) =& 4x + 4y - 2xy - 4 \\ f_y(x, y) =& 4x - x^2 \end{aligned}$$

   b) Formamos el sistema:

   $$\begin{aligned} 4x + 4y - 2xy - 4 =& 0 \\ 4x - x^2 =& 0 \end{aligned}$$

   Los puntos estacionarios del sistema son $(0, 1)$ y $(4, 3)$.

   c) Luego encontramos derivadas segundas para evaluarlas en los puntos estacionarios y determinar el signo del determinante de la matriz Hessiana a fin de clasificarlos.

   $$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) =& 4 - 2y \Rightarrow f_{xx}(0, 1) = -2 < 0 \text{ y } \Rightarrow f_{xx}(4, 3) = 2 > 0 \\ f_{yy}(x, y) =& 0 \Rightarrow f_{yy}(0, 1) = 0 \text{ y } \Rightarrow f_{yy}(4, 3) = 0 \\ f_{yx}(x, y) =& f_{xy}(x, y) = 4 - 2x \Rightarrow f_{xy}(0, 1) = 4 \text{ y } \Rightarrow f_{xx}(4, 3) = -2 \end{aligned}$$

   Luego,

   - $\det[H_{f(0,1)}] = -2.0 - 4.4 = -16$ se alcanza un punto de silla en $(0, 1)$.
   - $\det[H_{f(4,3)}] = 2.0 - (-2).(-2) = -4$ se alcanza un punto de silla en $(4, 3)$.

3. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$

   a) Derivadas primeras:

   $$\begin{aligned} f_x(x, y) =& 6x - 4y + 8 \\ f_y(x, y) =& -4x + 6y - 17 \end{aligned}$$

   b) Formamos el sistema:

   $$\begin{aligned} 6x - 4y + 8 =& 0 \\ -4x + 6y - 17 =& 0 \end{aligned}$$

   El punto estacionario es $\left(1, \frac{7}{2}\right)$.

   c) Luego encontramos derivadas segundas para evaluarlas en el punto estacionario y determinar el signo del determinante de la matriz Hessiana a fin de clasificarlos.

   $$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) =& 6 \Rightarrow f_{xx}\left(1, \frac{7}{2}\right) = 6 > 0 \\ f_{yy}(x, y) =& 6 \Rightarrow f_{yy}\left(1, \frac{7}{2}\right) = 6 > 0 \\ f_{yx}(x, y) =& f_{xy}(x, y) = -4 \end{aligned}$$

   Luego,

- $\det[H_{f\left(1,\frac{7}{2}\right)}] = 6.6 - (-4).(-4) = 20$ se alcanza un <u>mínimo relativo</u> en $\left(1, \frac{7}{2}\right)$.

4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

   a) Derivadas primeras:

   $$\begin{aligned} f_x(x, y) =& 3x^2 - 3y \\ f_y(x, y) =& 3y^2 - 3x \end{aligned}$$

   b) Formamos el sistema:

   $$\begin{aligned} 3x^2 - 3y =& 0 \\ 3y^2 - 3x =& 0 \end{aligned}$$

   Luego, $f_x = 3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow$ sustituimos en en $f_y = 0 \Rightarrow 3x^4 - 3x = 0 \Rightarrow (0, 0)$ y $(1, 1)$ son puntos estacionarios.

   c) Luego encontramos derivadas segundas para evaluarlas en los puntos estacionarios y determinar el signo del determinante de la matriz Hessiana a fin de clasificar dichos puntos.

   $$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) =& 6x \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 0 \text{ y } f_{xx}(1, 1) = 6 > 0 \\ f_{yy}(x, y) =& 6y \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 0 \text{ y } f_{yy}(1, 1) = 6 > 0 \\ f_{yx}(x, y) =& f_{xy}(x, y) = -3 \end{aligned}$$

   Luego,

   - $\det(H_{f(0,0)}) = 0.\,0 - 9 = -9 < 0 \Rightarrow$ hay un <u>punto silla</u> en $(0, 0)$.
   - $\det(H_{f(1,1)}) = 6.\,6 - 9 = 27 > 0 \Rightarrow$ hay <u>mínimo relativo</u> en $(1, 1)$.

Ejercicio 8. 1. : $f(x,y) = ax^2 + bxy^2 + 3y^2 - 10x$

$$f_x(x,y) = 2ax + by^2 - 10$$
$$f_y(x,y) = 2bxy + 6y$$

Luego,

$$f_x(5,0) = 2a5 + b(0)^2 - 10 = 10a - 10 = 0 \Rightarrow a = 1$$
$$f_y(5,0) = 2b5(0) + 6(0) = 0$$

A su vez,

$$f_x(-1,2) = 2(1)(-1) + b2^2 - 10 = -2 + 4b - 10 = -12 + 4b = 0 \Rightarrow b = 3$$
$$f_y(-1,2) = 2(3)(-1)(2) + 6(2) = 0$$

2. Clasificar los puntos estacionarios de f hallados.

$$f_x x(x,y) = 2a = 2{,}1 = 2$$
$$f_y y(x,y) = 2bx + 6 = (2)(3)x + 6 = 6x + 6$$
$$f_y x(x,y) = f_x y(x,y) = 2by = (2)(3)y = 6y$$

Luego,

$$\det[H]_f(5,0) = 2(6(5)+6) - (6(0))^2 = 72 > 0$$

y como $f_{xx}(5,0) = 2; f_{yy}(5,0) = 36$ en (5,0) se presenta un mínimo relativo.

Para (-1,2):

$$\det[H]_f(-1,2) = 2(6(-1)+6) - (6(2))^2 = -144 < 0$$

por lo que en (-1,2) se presenta un <u>punto de silla</u>.

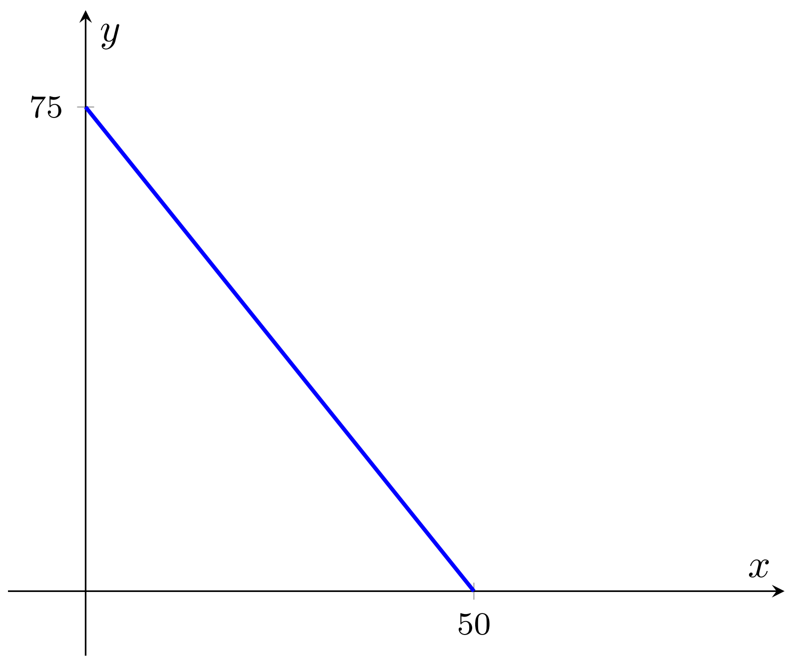
Ejercicio 9. 1. $f(2, 1{,}75) \approx 3{,}838$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 30 + 30x \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1{,}75) = 90$ Interpretación: Dada una situación inicial con un precio del taxi de $ 2 y un precio de Uber de $ 1,75 por cada 100 metros recorridos, por cada $ 1 que aumente el precio de Uber, dejando constante el precio del taxi, la cantidad demandada de servicios de taxi aumenta aproximadamente en 90 unidades.

3.
$$f_x(x,y) = -200 + 40x + 30y$$
$$f_x(3,4) = 40$$
$$f_y(x,y) = 30 + 30x$$
$$f_y(x,y) = 120$$

Por lo que (3,4) no es punto estacionario de f.

Ejercicio 10.



Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.

1. $f_x = 5y - 4 \Rightarrow f_{xx} = 0$
   $f_y = 5x \Rightarrow f_{yy} = 0$
   $f_{xy} = fyx = 5$

2. $f_x = 6x^2 - 4y + 10 \Rightarrow f_{xx} = 12x$
   $f_y = 4 - 4x \Rightarrow f_{yy} = 0$
   $f_{xy} = fyx = -4$

3. $f_x = \frac{-1}{x^2}(y^2 + 3y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{2x}{x^4}(y^2 + 3y)$
   $f_y = \frac{1}{x}(2y + 3) \Rightarrow f_{yy} = \frac{2}{x}$
   $f_{xy} = fyx = \frac{-1}{x^2}(2y + 3)$

4. $f_x = 2e^{2x}ln(y) \Rightarrow f_{xx} = 4e^{2x}ln(y)$
   $f_y = e^{2x}\frac{1}{y} \Rightarrow f_{yy} = e^{2x}\frac{(-1)}{y^2}$
   $f_{xy} = fyx = 2e^{2x}\frac{1}{y}$

5. $f_x = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow f_{xx} = 0$
   $f_y = \frac{3x}{y^4} \Rightarrow f_{yy} = \frac{-12x}{y^5}$
   $f_{xy} = fyx = \frac{3}{y^4}$

6. $f_x = 3x^2 - 3e^{(3x-2y)} \Rightarrow f_{xx} = 6x - 9e^{(3x-2y)}$
   $f_y = 2e^{(3x-2y)} \Rightarrow f_{yy} = -4e^{(3x-2y)}$
   $f_{xy} = fyx = 6e^{(3x-2y)}$

Ejercicio 2.

1. $f(x, y) = y - y^2 - 3x - 6x^2$
   Entonces,
   $$f_x(x, y) = -3 - 12x$$
   $$f_y(x, y) = 1 - 2y$$
   Entonces el sistema queda de la siguiente manera:
   $$-3 - 12x = 0$$
   $$1 - 2y = 0$$
   De lo que se desprende:
   $$x = \frac{-1}{4}; y = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$f_{xx}(x,y) = -12$$
$$f_{yy}(x,y) = -2$$
$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 0$$

Entonces:

$$f_{xx}(\frac{-1}{4},\frac{1}{2}) = -12 < 0$$
$$fyy(\frac{-1}{4},\frac{1}{2}) = -2 < 0$$

y

$$det[H]_f(\frac{-1}{4},\frac{1}{2}) = -12.(-2) - 0 = 24 > 0$$

Entonces la función presenta un máximo relativo en el punto estacionario $(\frac{-1}{4},\frac{1}{2})$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x^3$

   Entonces,

$$f_x(x,y) = 2x - y + 3x^2$$
$$f_y(x,y) = 2y - x$$

   Entonces el sistema queda de la siguiente manera:

$$2y - x = 0$$
$$2x - y + 3x^2 = 0$$

   Esto es equivalente a,

$$\frac{x}{2} = y$$
$$2x - y + 3x^2 = 0$$

   Entonces,

$$2x - \frac{x}{2} + 3x^2 = \frac{3x}{2} + 3x^2 = 0$$

   Lo cual equivale a

$$\frac{x}{2} + x^2 = x(\frac{1}{2} + x) = 0$$

   Lo cual implica $x = 0$ o $x = \frac{-1}{2}$
   De lo que se desprende:

$$\{x = 0; y = 0\}, \{x = \frac{-1}{2}; y = \frac{-1}{4}\}$$

   Luego,

$$f_x x(x,y) = 2 + 6x$$

$$f_y y(x,y) = 2$$
$$f_y x = f_x y = -1$$

Entonces, para $(0,0)$:

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$
$$f_{yy}(0,0) = 2 > 0$$

y

$$det[H]_f(0,0) = 2{,}2 - (-1).(-1) = 3 > 0$$

Entonces la función presenta un máximo relativo en el punto estacionario $(0,0)$

Y para $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4})$:

$$f_{xx}(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}) = -1 > 0$$
$$f_{yy}(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}) = 2 > 0$$

y

$$det[H]_f(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}) = (-1){,}2 - (-1).(-1) = -3 < 0$$

Entonces la función presenta un punto de silla en el punto estacionario

$$(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4})$$

3. $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$

   Entonces,

   $$f_x(x,y) = y - 3x^2$$
   $$f_y(x,y) = x - 2y$$

   Las derivadas segundas son:

   $$f_x x(x,y) = -6x$$
   $$f_y y(x,y) = -2$$
   $$f_x y(x,y) = 1$$

   Luego,

   $$f_x(x,y) = y - 3x^2 = 0 \Rightarrow y = 3x^2$$

   $\Rightarrow$ Sustituyo en $f_y = 0 \Rightarrow x - 2(3x^2) = 0 \Rightarrow (x = 0, y = 0); (x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{12})$.

   Analizamos determinante del Hessiano para determinar la naturaleza de los puntos críticos:

   - $\det(H_f(0,0)) = 0.(-2) - 1 < 0 \Rightarrow$ Hay punto silla en $(0,0)$
   - $\det(H_f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})) = 6.\frac{1}{6}.(-2) - 1 < 0 \Rightarrow$ Hay punto silla en $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$

Ejercicio 3.

1. Si (3,3) es un punto estacionario, entonces $f_x(3,3) = 0$ y $f_y(3,3) = 0$:

   $$f_x(3,3) = 2\alpha x - y - 9 = 0 \Rightarrow f_x(3,3) = 2\alpha 3 - 3 - 9 = 0 \Rightarrow 6\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 2$$
   $$f_y(3,3) = y - x = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0$$

   Por su parte si $f(3,3) = 9$ entonces:

   $$\begin{aligned} f(3,3) =& (2)3^2 + \frac{3^2}{2} - (3)(3) - 9(3) + \frac{\beta}{2} = 9 \\ & 18 + \frac{9}{2} - 9 - 27 + \frac{\beta}{2} = 9 \\ & \frac{-27}{2} + \frac{\beta}{2} = 9 \\ & \frac{\beta}{2} = \frac{45}{2} \Rightarrow \beta = 45 \end{aligned}$$

2. $H_f(3,3) \Rightarrow f_{xx}(3,3) = 4; f_{xy}(3,3) = -1; f_{yx}(3,3) = -1$ y ; $f_{yy}(3,3) = 1$, por lo tanto: $H_f(3,3) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\det H_f(3,3) = 4(1) - (-1)(-1) = 3 \Rightarrow \det H_f(3,3) = 3 > 0$ por lo tanto, (3,3) es un mínimo relativo.

3. $f_y(5,4) = 4-5 = -1 \Rightarrow$ Interpretación: Partiendo de una situación inicial con 5 médicos cada 1.000 habitantes y una inversión mensual de 4 dólares per cápita en información, por cada dólar adicional que se gaste en información, el tiempo de espera para consultar con un especialista disminuye en 1 día aproximadamente.