# Repartido práctico Nº7: Optimización de funciones de varias variables con restricciones

Matemática para las Ciencias Sociales - FCS - UDELAR

2024

**Ejercicio 1.**

Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Determinar en cada caso el mínimo absoluto de $f$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$:

a. $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$
   $g(x, y) = x - 4$

b. $f(x, y) = 5x^2 - 4xy + y^2$
   $g(x, y) = 10 - 7x + 3y$

c. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 4$
   $g(x, y) = y - 5$

**Ejercicio 2.**

Una compañía ha recibido una orden de 200 unidades para uno de sus productos. El pedido será surtido con la producción combinada de sus dos plantas. La función conjunta de costo de la fabricación de este producto es:

$$C = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2 + 500$$

donde $q_1$ y $q_2$ son las cantidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. Si el objetivo es minimizar los costos totales, sujeto a la condición de suministrar 200 unidades procedentes de ambas plantas, ¿qué cantidades deberá proporcionar cada una?

**Ejercicio 3.**

El alcalde de la localidad de Las Rocas, Roberto Rodríguez, recibió la noticia de que el gobierno departamental le dará 9 mil pesos. La única condición que impone el gobierno departamental es que solo puede gastar el dinero en ciclovías o en la construcción de estacionamientos. Sus asesores le han dicho que la utilidad en la población de esta inversión estará dada por:

$$U(x, y) = -6x^2 + 72x - 3y^2 + 90y$$

Donde:

- $x$ es la cantidad de km cuadrados construidos de estacionamientos.
- $y$ es la cantidad de km cuadrados construidos de ciclovías.

Tenga en cuenta que el precio de 1 $km^2$ de ciclovías es mil pesos y el de 1 $km^2$ de estacionamientos es de 2 mil pesos.

1. Plantee el problema como un problema de maximización con la restricción que corresponda.
2. Solucione el problema de maximización restringida detallando la cantidad de $m^2$ que se construirán de ciclovías y estacionamientos.

**Ejercicio 4.** Una fabrica produce dos tipos de articulo (A y B). Por restricciones contractuales con sus compradores, debe producir un mínimo de 2 artículos mensuales de tipo B. Disponemos de la siguiente función de utilidad mensual asociada a la producción de ambos tipos de producto

$$U : D \to \mathbb{R} / \ U(x, y) = 3x^3 + (y + 2)^2 - x$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 2\}$ donde $x$ representa la cantidad de productos del tipo A, $y$ representa la cantidad de productos de tipo B.

1. Representar gráficamente el conjunto $D$.
2. Supongamos que la fabrica en cuestión tiene un tope de capacidad de 41 artículos mensuales en total. Plantear lo anterior como una restricción analítica y representar gráficamente el conjunto de posibilidades de producción correspondiente a dicha restricción.
3. Asumiendo la restricción planteada en 2), ¿que combinación de artículos de tipo A y B deben producirse para maximizar la utilidad?

**Ejercicio 5.**

Un agricultor quiere repartir sus 2 hectáreas de terreno entre soja y cebada. Una vez considerados los costos de producción y las características del mercado uruguayo, es posible concluir que las ganancias mensuales (en miles de dolares) obtenidas por su producción están determinadas por la siguiente función:

$$G(x, y) = -2x^3 + \frac{7}{3}x - y^3 + 10y$$

donde $x$ representa la cantidad de hectáreas de soja e $y$ la cantidad de hectáreas de cebada.

1. Plantee el problema del productor como un problema de optimización restringida.

2. Resuelve el problema anterior e indique cuanta superficie de soja y cebada debe plantar el productor para maximizar su ganancia. Justificar adecuadamente que la solución encontrada efectivamente maximiza la ganancia. ¿Cual es dicha ganancia?

**Ejercicio 6.**

A fin de año se realizarán las elecciones presidenciales en el pequeño país de Las Flores, donde participan dos candidatos y están obligados a votar 30.000.000 personas. Participan de esta elección la actual alcaldesa Kimberly Beral del Partido de las Rosas y el candidato de la oposición Mark Onser Vador del Partido de los Jazmines. Las encuestas, infalibles, muestran que actualmente hay 10.000.000 personas que votarán a Kimberly Beral, que 5.000.000 votarán Mark Onser Vador y que hay 15.000.000 indecisos. El candidato de oposición contrató al mejor jefe de campaña disponible (Ruben Cajac Ualquiera) el cual indicó que la *cantidad de indecisos que convencerá* ($V$) va depender de las horas que se contraten de publicidad en televisión ($x$) y la cantidad de personas (en cientos) que contrate para repartir listas ($y$) de la siguiente forma:

$$V(x, y) = x^3y^2.\frac{1}{100}$$

El objetivo no es solo ganar la presidencia sino sacar la mayor cantidad de votos para obtener la mayor cantidad de diputados para el Partido de los Jazmines.

El problema de Mark Onser Vador es que el dinero con el que cuenta para hacer la campaña es limitado, ya que solo dispone de 200 lingotes de oro; donde cada hora de televisión cuesta 2 lingotes de oro, y cada grupo de 100 personas que contrata para repartir listas cuesta 1 lingote de oro.

1. Plantee el problema como un problema de maximización con las restricciones que corresponda.

2. Solucione el problema detallando cuántas personas serán contratadas y cuantos minutos de televisión se pagarán con el objetivo de conseguir la mayor cantidad de votos posibles.

3. ¿Cual será el gasto total de la campaña con las alternativas elegidas?

4. ¿Le alcanzará esta estrategia a Mark Onser Vador para ganar las elecciones?

**Ejercicio 7.**

Un consumidor dispone de 48 unidades monetarias (u.m.) para gastar en cine y teatro en el año. Se propone gastar completamente el monto disponible. La entrada de cine cuesta 2 u.m. y la de teatro 3 u.m. La función de utilidad del consumidor, en relación con estos productos es $U(x, y) = x^3y^3$, donde $x =$ número de entradas de cine a consumir en el año e $y$ $=$ número de entradas de teatro a consumir en el año. ¿Cómo debe distribuir su presupuesto el consumidor para maximizar la utilidad?

Se pide:

a. Represente gráficamente el conjunto de posibilidades de consumo de este consumidor.

b. Exprese formalmente el problema de maximización al que se enfrenta el consumidor.

c. Resuelva el problema.

d. Halle la combinación de trabajo y capital que resuelve el problema y bosqueje esta situación si:

   i. Se duplica la cantidad de u.m. disponibles del consumidor.
   ii. El costo de las entradas baja a la mitad.
   iii. Se duplica la cantidad de u.m. disponibles del consumidor y el precio de las entradas.

# Ejercicios complementarios

**Ejercicio 1.**

El costo de producción de un producto industrial depende exclusivamente de las horas de trabajo utilizadas y del capital empleado en la producción. Las cifras refieren a un mes de producción.

Sean:

- $L =$ horas de trabajo utilizadas en un mes
- $K =$ capital (en miles de dólares) empleado en un mes

Los costos unitarios son:

- $p_L = U\$S4$, precio de la hora de trabajo
- $p_K = U\$S8$, costo de U$S 1.000 de capital

Se quiere minimizar el costo mensual de producción: $C(L, K) = 4L + 8K$.

Supongamos que la función de producción de la empresa, que depende del trabajo y del capital empleado, es: $Q(L, K) = L.K$ , donde $Q$ es la cantidad de unidades producidas.

Si se deben producir exactamente 1.250 unidades al mes (por ejemplo, porque los clientes exigen esa cantidad al mes), la restricción del problema sería: $Q(L, K) = K.L = 1250$
*Se pide:*

1. Hallar la combinación de trabajo y de capital que minimice el costo de producción con los datos proporcionados por la letra.
2. Suponga que aumentan los costos unitarios del trabajo por hora de U$S 4 a U$S 8. Resuelva el problema nuevamente y comente las diferencias halladas.

**Ejercicio 2.**

Para todos los casos siguientes consideraremos las funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Resolver los problemas de optimización restringida

a. $max f(x, y) = 20x + 10y - x^2 - y^2$
s.a $g(x, y) = x - 2y - 10 = 0$

b. $max f(x, y) = -y^2 - 5x^2 + 4xy + 16x + 10y$
s.a $g(x, y) = 2x + y - 60 = 0$

c. $min f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - 60x - 32y + 400$
s.a $g(x, y) = x + y - 10 = 0$