Solución repartido práctico Nº7: Optimización de funciones de varias variables con restricciones

Matemática para las Ciencias Sociales - FCS - UDELAR

2024

Ejercicio 1.
En todos los casos, el dominio de las funciones f y g es $\mathbb{R}^2$

a.

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x,y) =& (x-1)^2 + y^2 \\ s.a. & x - 4 = 0 \end{aligned}$$

A partir de la restricción $x = 4$, podemos sustituir en f y obtenemos una función de una sola variable

$$h(y) = f(4,y) = (4-1)^2 + y^2$$

h es una función cuadrática que alcanza su mínimo absoluto en $y = 0$. Por lo tanto la solución al problema inicial es el punto $(4,0)$.

b.

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x,y) =& 5x^2 - 4xy + y^2 \\ s.a. & 10 - 7x + 3y = 0 \end{aligned}$$

A partir de la restricción $10 - 7x + 3y = 0$, podemos sustituir en f y obtenemos una función de una sola variable

$$h(x) = f(x, \frac{7x-10}{3}) = \frac{10x^2 - 20x + 100}{9}$$

h es una función cuadrática que alcanza su mínimo absoluto en $x = 1$. Por lo tanto la solución al problema inicial es el punto $(1,-1)$.

c.

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x,y) =& x^2 + y^2 - 4y + 4 \\ s.a. & y - 5 = 0 \end{aligned}$$

A partir de la restricción $y = 5$, podemos sustituir en f y obtenemos una función de una sola variable

$$h(x) = f(x, 5) = x^2 + 5^2 - 4{,}5 + 4$$

h es una función cuadrática que alcanza su mínimo absoluto en $x = 0$. Por lo tanto la solución al problema inicial es el punto $(0, 5)$.

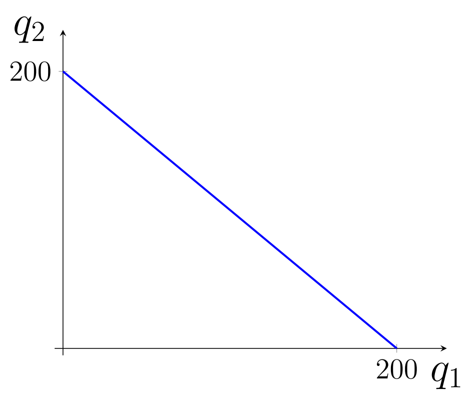
Ejercicio 2.
El problema que debe resolver la compañía es:

$$\text{Minimizar } C(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2 + 500$$
$$\text{sujeto a } q_1 + q_2 = 200$$

Primero observemos que el dominio de las funciones C y $g(q_1, q_2) = q_1 + q_2$ es

$$D = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 / q_1 \geq 0, q_2 \geq 0\}$$

Por lo tanto, los pares (q_1, q_2) que verifican la restricción corresponden al segmento



A partir de la restricción $q_2 = 200 - q_1$, podemos sustituir en C y obtenemos una función de una sola variable

$$h(q_1) = C(q_1, 200 - q_1) = 2q_1^2 - 200q_1 + 40500$$

El problema se reduce a determinar el mínimo absoluto de h en el intervalo $q_1 \in [0, 200]$. Es directo verificar que h es una función cuadratica que alcanza su mínimo absoluto en $q_1 = 50$. Por lo tanto la solución al problema inicial es el punto $(50, 200)$.
En definitiva, la compañía debe producir 50 unidades en la planta 1 y 150 unidades en la planta 2.

Ejercicio 3.

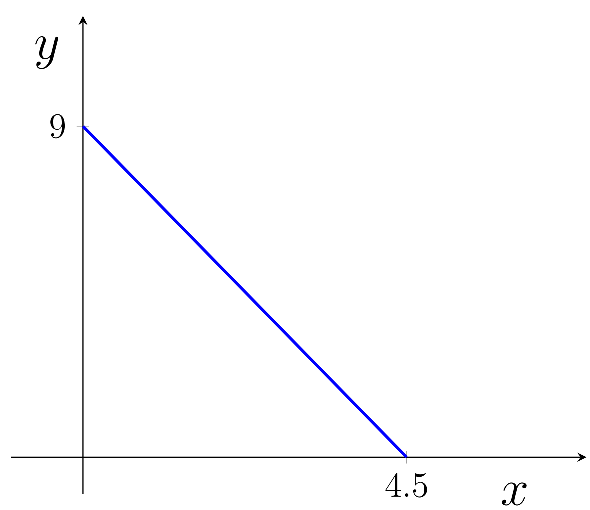
1. Plantee el problema como un problema de maximización con la restricción que corresponda.
   La restricción puede escribirse como $2000x + 1000y = 9000$. A su vez, esta última ecuación es equivalente a $2x + y = 9$. Por tanto, el problema puede escribirse como

$$\begin{aligned} maxU(x, y) &= -6x^2 + 72x - 3y^2 + 90y \\ \text{s.a } \ 2x + y &= 9 \end{aligned}$$

2. Solucione el problema detallando la cantidad de m^2 que se construirán de cada una de las alternativas.
   Observemos que el dominio de las funciones U y $g(x, y) = 2x + y$ es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$$

   Esto implica que el conjunto de puntos que verifican la restricción es



   Sustituyendo $y = 9 - 2x$ en U obtenemos la función

$$h(x) = U(x, 9 - 2x) = 567 - 18x^2$$

   El problema inicial puede ser planteado en termino de determinar el maximo absoluto de h en el intervalo $[0; 4{,}5]$.
   La derivada $h'(x) = -36x$ tiene diagrama de signo

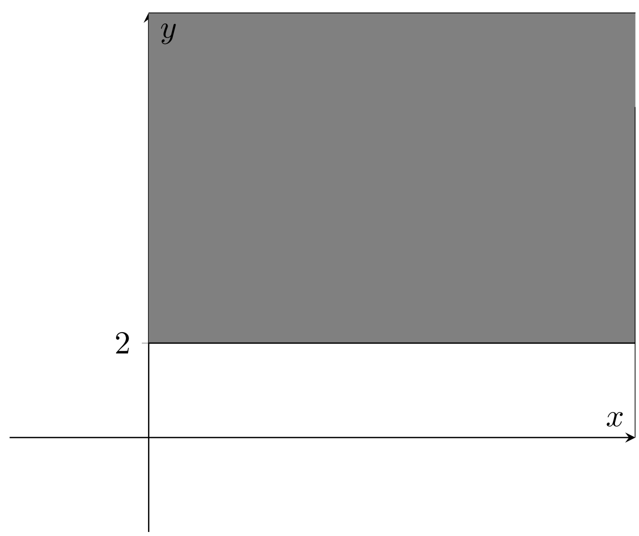
Así vemos que h alcanza su máximo absoluto en $x = 0$ y por lo tanto el punto $(0, 9)$ es solución del problema inicial. Esto quiere decir que se deberán construir 9.000 m^2 de ciclovía.

Ejercicio 4. Una fabrica produce dos tipos de articulo (A y B). Por restricciones contractuales con sus compradores, debe producir un mínimo de 2 artículos mensuales de tipo B. Disponemos de la siguiente función de utilidad mensual asociada a la producción de ambos tipos de producto

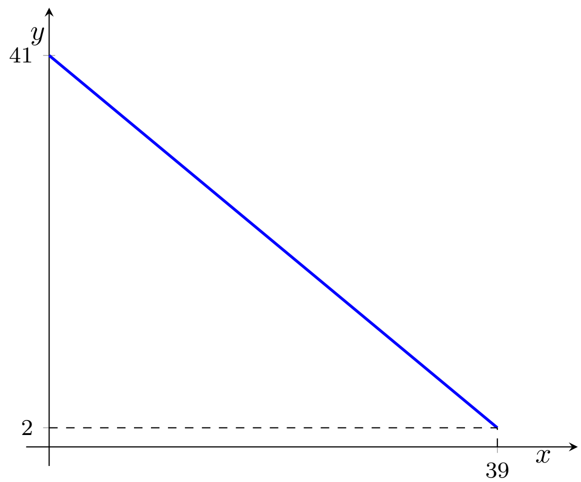
$$U : D \to \mathbb{R}/\ U(x, y) = 3x^3 + (y + 2)^2 - x$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 2\}$ donde x representa la cantidad de productos del tipo A, y representa la cantidad de productos de tipo B.

1. Representar gráficamente el conjunto D.



2. Supongamos que la fabrica en cuestión tiene un tope de capacidad de 41 artículos mensuales en total. Plantear lo anterior como una restricción analítica y representar gráficamente el conjunto de posibilidades de producción correspondiente a dicha restricción.



3. Asumiendo la restricción planteada en 2), ¿que combinación de artículos de tipo A y B deben producirse para maximizar la utilidad?

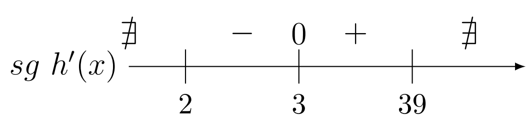
   Necesitamos maximizar $U(x,y) = 3x^3 + (y+2)^2 - x$ sujeto a $x + y = 41$. A partir de esta restricción, obtenemos $y = 41 - x$ y sustituimos en U

   $$\begin{aligned} U(x, 41-x) &= 3x^3 + (43-x)^2 - x \\ &= 3x^3 + x^2 - 87x + 1849 \end{aligned}$$

   Si llamamos $h(x) = 3x^3 + x^2 - 87x + 1849$ entonces el problema original podemos reducirlo a determinar el máximo absoluto de h en $[0, 39]$.
   Para esto, calculamos h'

   $$h'(x) = 9x^2 + 2x - 87 \implies x = -\frac{29}{9} \text{ ó } x = 3$$

   El diagrama de signo de h' es



   entonces, resta calcular $h(0) = 1849$ y $h(39) = 177.934$. Esto quiere decir que el par $(x, y) = (39, 2)$ es solución del problema original.

Ejercicio 5.

1. *max* $G(x,y)$ sujeto a $x + y = 2$.

2. Primero observemos que las restricciones $0 \leq x$ y $0 \leq y$ determinan que $0 \leq y \leq 2$. Sustituyendo $x = 2 - y$ en G tenemos

$$h(y) = G(2-y, y) = \frac{3y^3 - 36y^2 + 95y - 34}{3}$$

El problema se reduce a encontrar el máximo absoluto de h en el intervalo $[0, 2]$. Derivando h y calculando el diagrama de signo de $h'(y)$ obtenemos

$$\begin{array}{lccccccc} & \nexists & & + & 0 & - & & \nexists \\ sg(h'(y)) & & | & & | & & | & \longrightarrow \\ & & 0 & & \frac{5}{3} & & 2 & \end{array}$$

Por lo tanto el máximo absoluto se alcanza en $y = \frac{5}{3}$ y la solución al problema inicial es el punto $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$.
El productor deberá cultivar $\frac{1}{3}$ de hectárea de soja y $\frac{5}{3}$ de hectáreas de cebada. En ese caso la ganancia sera de $g(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}) \approx 12,7$, lo cual representa 12.700 dolares aproximadamente.

Ejercicio 6.

1. Plantee el problema como un problema de maximización con las restricciones que corresponda (corrobore que lo que obtiene es un máximo).

$$\begin{aligned} &maxV(x, y) = x^3y^2.\frac{1}{100} \\ &\text{s.a } \ 2x + y = 200 \end{aligned}$$

2. Solucione el problema detallando cuántas personas serán contratadas y cuantos minutos de televisión se pagarán con el objetivo de conseguir la mayor cantidad de votos posibles.

A partir de la restricción $2x + y = 200$ obtenemos $y = 200 - 2x$ y sustituimos en la función V

$$h(x) = V(x, 200-2x) = x^3(200-2x)^2\frac{1}{100}$$

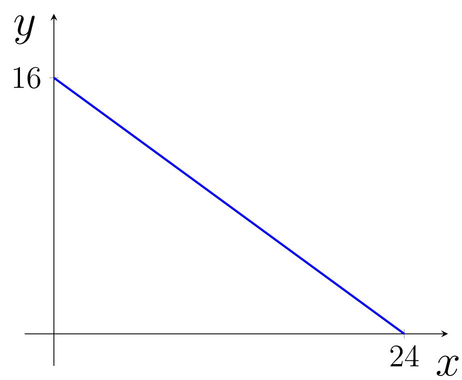
Observemos que las restricciones $0 \leq x$ y $0 \leq y$ implican que $0 \leq x \leq 100$. Por lo que reducimos el problema original a determinar el máximo absoluto de la función h en el intervalo $[0, 100]$.
Derivamos la función h

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2(200-2x)^2\frac{1}{100} + x^3 2(-2)(200-2x)\frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{100}x^2(200-2x)\left(3(200-2x) - 4x\right) \\ &= \frac{1}{100}x^2(2x-200)\left(10x - 600\right) \end{aligned}$$

Analizando el diagrama de signo de $h'(x)$ concluimos que la función h alcanza su máximo absoluto en el punto $x = 60$. Por lo tanto, la solución al problema original se alcanza en el punto $(60, 80)$. Entonces, se contratarán 3600 (60×60) minutos de TV y se contratarán 8000 personas para repartir listas.

Ejercicio 7.

a. Suponiendo que el consumidor va a gastar todo lo que tiene, a partir de la restricción $2x + 3y = 48$ tenemos que $y = 16 - \frac{2}{3}x$. Sabemos que $x \geq 0$ y que $y \geq 0$, lo cual implica que $0 \leq x \leq 24$. En definitiva, el conjunto de posibilidades del consumidor esta dado por el segmento en azul en el siguiente gráfico.



b. El problema es:

$$\text{Máximizar } U(x, y) = x^3 y^3$$
$$\text{sujeto a } 2x + 3y = 48$$

c. Resolvemos por sustitución: A partir de la restricción obtenemos $y = 16 - \frac{2}{3}x$ y al sustituir en la función U resulta

$$h(x) = U(x, 16 - \frac{2}{3}x) = x^3(16 - \frac{2}{3}x)^3$$

El problema entonces se reduce a determinar el máximo absoluto de h en el intervalo $[0, 24]$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 3x^2 \left(16 - \frac{2}{3}x\right)^3 + x^3 3(-\frac{2}{3}) \left(16 - \frac{2}{3}x\right)^2 \\
&= 3x^2 \left(16 - \frac{2}{3}x\right)^2 \left(\left(16 - \frac{2}{3}x\right) - \frac{2}{3}x\right) \\
&= 3x^2 \left(16 - \frac{2}{3}x\right)^2 \left(16 - \frac{4}{3}x\right) \\
&= -3x^2 \left(\frac{2}{3}x - 16\right)^2 \left(\frac{4}{3}x - 16\right)
\end{aligned}$$

Este polinomio de grado 5 tiene el siguiente diagrama de signo

$sg(h'(x))$	$\nexists$	0	$+$	0	$-$	0	$\nexists$
		0		12		24	

Por lo tanto, h alcanza su máximo absoluto en $x = 12$. Concluimos así que la solución al problema original es el par $(12, 8)$. Lo cual quiere decir que la utilidad va a ser máxima si el consumidor compra 12 entradas de cine y 8 de teatro al año.

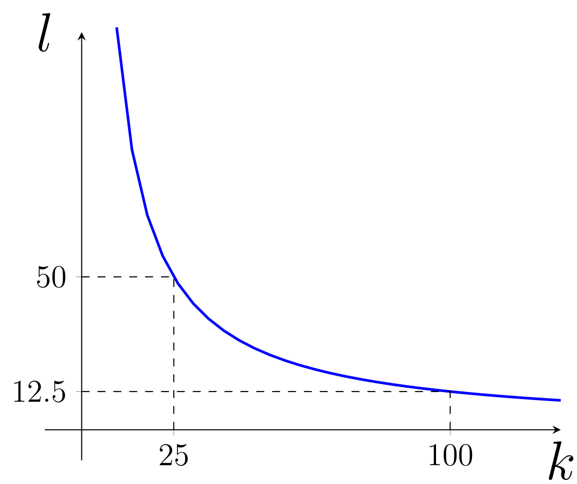
Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.

El problema que debe resolver la compañía es:

$$\text{Minimizar } C(l,k) = 4l + 8K$$
$$\text{sujeto a } l.k = 1.250$$

Observemos que el dominio de las funciones C y Q es $D = \{(l,k) \in \mathbb{R}^2 / l > 0, k > 0\}$
Los puntos (k,l) que verifican la restricción corresponden a la siguiente curva



Sustituyendo $l = \frac{1250}{k}$ en C obtenemos una función de una sola variable

$$h(k) = C(\frac{1250}{k}, k) = \frac{5000}{k} + 8k$$

De esta forma reducimos el problema original a la determinación del máximo absoluto de h en el intervalo $(0, +\infty)$.
Derivando la función h y analizando el diagrama de signo de h' podemos concluir que h alcanza su mínimo absoluto en $k = 25$. Por lo tanto, en el contexto del problema original el costo mensual de producción es mínimo cuando $k = 25$ y $l = 50$