6. Sucesiones y series numéricas

Se utilizan para identificar y analizar la evolución de variables (sucesiones) en el tiempo y calcular su valor en un momento del tiempo o su valor acumulado durante determinado período (series).

6.1. Sucesiones

El concepto de sucesión tiene aplicaciones en los más diversos ámbitos: se utiliza para representar la evolución de una población de individuos o de la producción de bienes y servicios de un país, y para analizar políticas y programas aplicados (o proyectados) por el Gobierno, el sector privado u otros agentes en diversas áreas como la salud, la educación, por ejemplo.

Pensemos en el caso de una población de personas, la población de habitantes de Uruguay. La misma se estima que ha crecido en los últimos 10 años a una tasa anual de 0,17 %. Si suponemos que la misma tasa se mantendrá constante en los próximos 5 años y teniendo en cuenta que el INE (Instituto Nacional de Estadística) estima que la población de Uruguay en 2010 era de 3.356.584 personas, ¿cuál será la evolución de la población uruguaya en los próximos 5 años?

La población de 2011 la podemos calcular multiplicando la población de 2010 por (1+0,17 %)=(1+0,0017) = 1,0017

Así obtenemos una población en 2011 de 3.356.584×1,0017≈3.362.290.[1]

La población de 2012 la obtendremos multiplicando el resultado anterior nuevamente por 1,0017, lo cual nos da: 3.368.006 habitantes.

Si continuamos razonando igual para el resto de los años, obtenemos los siguientes valores:
Si repasamos los cálculos hechos, vemos que siguen la siguiente regla:

Cuadro 1: Add caption

Año	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Población (en habitantes)	3.362.290	3.368.006	3.373.732	3.379.467	3.385.212

[1]El aproximado se debe a que la cifra fue redondeada a un número entero, por tratarse de número de habitantes.

$Pob_{2011} = Pob_{2010} \times 1{,}0017$
$Pob_{2012} = Pob_{2011} \times 1{,}0017 = Pob_{2010} \times 1{,}0017 \times 1{,}0017 = ob_{2010} \times (1{,}0017)^2$
$Pob_{2013} = Pob_{2012} \times 1{,}0017 = Pob_{2010} \times (1{,}0017)^3$
$Pob_{2014} = Pob_{2013} \times 1{,}0017 = Pob_{2010} \times (1{,}0017)^4$
$Pob_{2015} = Pob_{2014} \times 1{,}0017 = Pob_{2010} \times (1{,}0017)^5$

Podemos resumir todo en la presente regla de cálculo: $Pob_n = Pob_{2010} \times (1{,}0017)^n = 3356584 \times (1{,}0017)^n$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5$, donde nos referimos a "2011" como año 1, "2012" como año 2, y así hasta "2015" como año 5.

La evolución de la población de Uruguay en los próximos 5 años la hemos representado, en definitiva, como los primeros cinco términos de una sucesión de números reales.

Definición 1. Sucesión real.

Una sucesión real es una función que tiene como dominio el conjunto de los números naturales y como codominio el conjunto de los números reales.

Notación: Los valores de la sucesión los representaremos con la letra "a" y dependerán de una variable que puede tomar como valores números naturales y que representaremos con la letra "n". En términos matemáticos entonces la sucesión se define así:

$$a : N \to R$$

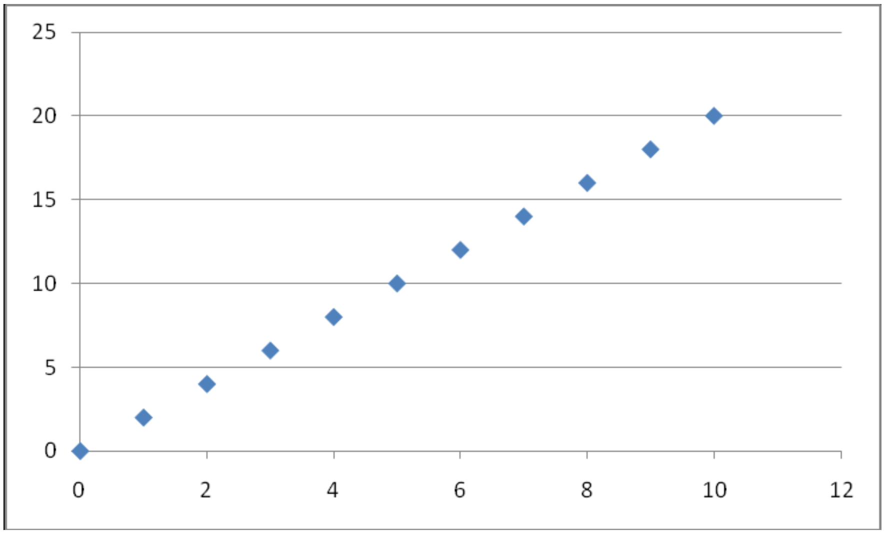
En este caso, en lugar de la notación habitual $a(n)$ (recuerde que para funciones con dominio real se usa $f(x)$), usaremos a_n para indicar la regla de cálculo de cada valor (o "término") de la sucesión.

En resumen, a_n designará a un término de la sucesión para un valor dado de n, mientras que (a_n) representará la sucesión en sí.

Ejemplo 1: Sea la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ tal que $a_n = 2n$

Para cada valor de n, tendremos su correspondiente valor de la sucesión.
Para $n = 0 \Rightarrow a_0 = 2 * 0 = 0$ Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 * 1 = 2$ Para $n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 * 2 = 4$
Y así sucesivamente, generándose la siguiente sucesión: 0, 2, 4,...

La representación gráfica de la sucesión (a_n) es la siguiente:



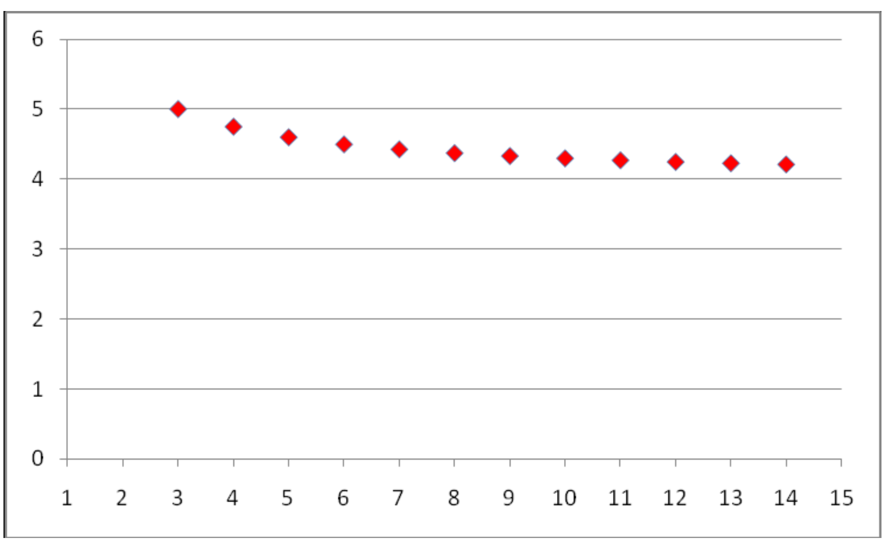
En el eje de abscisas se representa n, mientras en el de ordenadas se representa la sucesión.

Ejemplo 2: Sea la sucesión $(b_n)_{n\geq 3}$ tal que $b_n = \dfrac{4n+3}{n}$

En este caso, como se indica en el subíndice de la misma, la sucesión comienza en $n = 3$:

$$\underbrace{5}_{b_3}, \underbrace{\frac{19}{4}}_{b_4}, \underbrace{\frac{23}{5}}_{b_5}, \underbrace{\frac{27}{6}}_{b_6}, \underbrace{\frac{31}{7}}_{b_7}, \underbrace{\frac{35}{8}}_{b_8} \dots$$

La representación gráfica de la misma es:



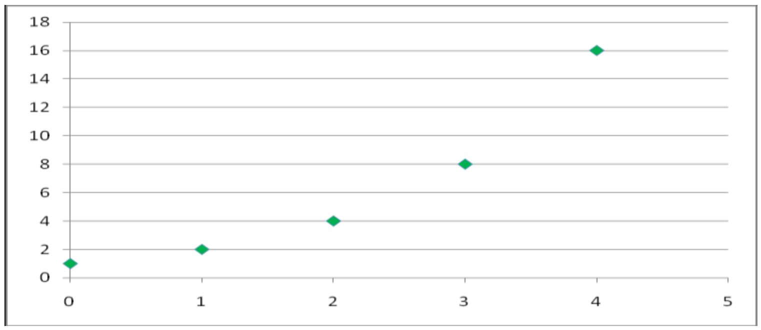
Ejemplo 3: Sea la sucesión (c_n): 1, 2, 4, 8, 16, ...

En este caso intentaremos deducir la regla de cálculo de la misma, analizando qué tienen en común sus distintos términos. Observando los valores de la sucesión, se aprecia que los mismos son todos potencias del número 2 (recuérdese que $2^0 = 1; 2^1 = 2; 2^2 = 4; 2^3 = 8; 2^4 = 16$).

En términos más formales, podemos plantear que la sucesión (c_n) tiene como regla de cálculo:

$$c_n = 2^n \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Gráficamente:



Ejemplo 4: Sucesión aritmética.
Sea una sucesión (d_n) tal que cada término se obtiene sumándole al anterior un valor constante k.
De esta manera, si el término inicial de la sucesión es $d_0 = d$, los siguientes términos serían:

$$\begin{aligned} &d_1 = d_0 + k = d + k \\ &d_2 = d_1 + k = \underbrace{d + k}_{d_1} + k = d + 2k \\ &d_3 = d_2 + k = \underbrace{d + 2k}_{d_2} + k = d + 3k \\ &... \end{aligned}$$

En términos generales, el término enésimo de la sucesión respondería a la siguiente regla de cálculo:

$$\begin{cases} d_0 = d \\ d_n = d + nk \end{cases}$$

donde "d" es el valor inicial de la sucesión y "k" es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión.

Ejemplo 5: Interpolación lineal.

Se tienen los siguientes datos sobre el número de funcionarios públicos en Uruguay para los años 1905 y 1909: 15.801 y 18.760, respectivamente.[2] No se dispone de datos para los años intermedios, pero se quiere aproximarlos. A esta operación de aproximar los valores de una serie entre dos datos conocidos se le conoce como interpolar. Uno de los posibles supuestos

[2]Fuente: Banco de datos del Área de Historia Económica del Instituto de Economía, Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República.

es pensar que el número de funcionarios públicos creció en una cantidad constante año tras año, lo cual nos llevaría a aplicar el concepto definido anteriormente de sucesión aritmética. El valor inicial sería 15.801. La diferencia de la sucesión, por su parte, podríamos calcularla teniendo en cuenta la diferencia total observada entre 1905 y 1909 (18.760 – 15.801 = 2.959) y el número de años transcurridos (4). Así, la diferencia de la sucesión sería 2.959/4 = 739,75. Suponiendo un crecimiento anual constante se tiene entonces que el número de funcionarios públicos habría crecido en 739,75 funcionarios públicos por año.

De esta manera, el número de funcionarios públicos entre 1905 y 1909 respondería a la siguiente fórmula:

$$a_n = 15801 + n \times 739{,}75 \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4$$

donde $n = 0$ corresponde al año 1905, $n = 1$ a 1906, $n = 2$ a 1907, $n = 3$ a 1908 y $n = 4$ a 1909.

Dicha fórmula corresponde a los cinco primeros términos de una sucesión aritmética.

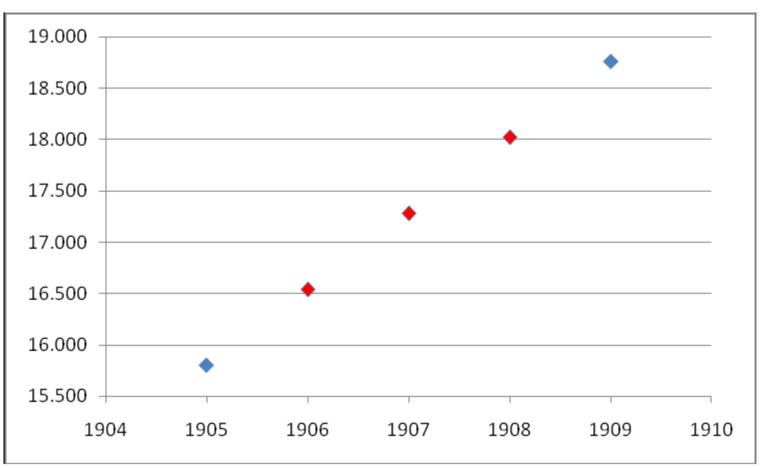
Los valores estimados para 1906, 1907 y 1908 son entonces, respectivamente:

$$a_1 = 15801 + 1 \times 739{,}75 = 16540{,}75$$
$$a_2 = 15801 + 2 \times 739{,}75 = 17280{,}5$$
$$a_3 = 15801 + 3 \times 739{,}75 = 18020{,}25$$

Generamos por lo tanto la siguiente serie histórica de datos:[3]

Año	N° de funcionarios públicos
1905	15.801
1906	16.541
1907	17.281
1908	18.020
1909	18.760

Gráficamente quedaría así (los puntos rojos señalan los datos aproximados; los puntos azules señalan los datos reales):



[3]Los valores estimados fueron redondeados teniendo en cuenta que se trata de número de personas.

Ejemplo 6. Sucesión geométrica.

Sea (e_n) una sucesión en que cada término se obtiene multiplicando al anterior por una constante q, denominada razón de la sucesión.

Así, si el término inicial de la sucesión es $e_0 = e$, los siguientes términos de la sucesión serían:

$$\begin{aligned}
&e_1 = e \times q \\
&e_2 = e_1 \times q = \underbrace{e \times q}_{e_1} \times q = e \times q^2 \\
&e_3 = e_2 \times q = \underbrace{e \times q^2}_{e_2} \times q = e \times q^3 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

En términos generales, el término enésimo de la sucesión respondería a la siguiente regla de cálculo:

$$\begin{cases} e_0 = e \\ e_n = e \times q^n, n \geq 1 \end{cases}$$

donde "e" es el término inicial de la sucesión y "q" es la razón.

Ejemplo 7: Interpolación geométrica.

Retomemos la tarea de aproximar el valor del número de funcionarios públicos entre 1905 y 1909, pero ahora en vez de suponer que el mismo se incrementó en una cantidad constante año tras año, supongamos que creció a una tasa (porcentaje) constante. Este nuevo supuesto nos conducirá a aplicar una sucesión geométrica para aproximar los valores. El valor inicial de la sucesión es el número de funcionarios en 1905: 15.801.

Nos resta deducir el valor de la razón de la sucesión. Para ello razonaremos de la siguiente forma. Si el número de funcionarios públicos creció en un porcentaje constante año tras año entonces el número de funcionarios en 1906 se podría obtener así:

$15.801 \times (q^1)$ donde q=1+tasa de crecimiento anual

El número de funcionarios en 1907 sería:

$$\underbrace{15801 \times q}_{\text{N}^{\text{o}} \text{ func. en 1906}} \times q = 15801 \times q^2$$

De esta manera, el número de funcionarios públicos entre 1905 y 1909 respondería a la siguiente fórmula:

$$a_n = 15{,}801 \times q^n \quad n = 0, 1, 2, 3, 4$$

donde n=0 corresponde al año 1905, n=1 a 1906, n=2 a 1907, n=3 a 1908 y n=4 a 1909.

Dicha fórmula corresponde a los cinco primeros términos de una sucesión geométrica.

Para poder aproximar los valores requeridos de la serie, debemos previamente deducir el valor de q. Dado que conocemos el número de funcionarios en 1909, tenemos:

$$a_4 = 15{,}801 \times q^4 = 18760$$

De la anterior ecuación podemos despejar el valor de q, la razón de la sucesión:

$$\Rightarrow q = \left(\frac{18760}{15801}\right)^{1/4} \approx 1{,}0439$$

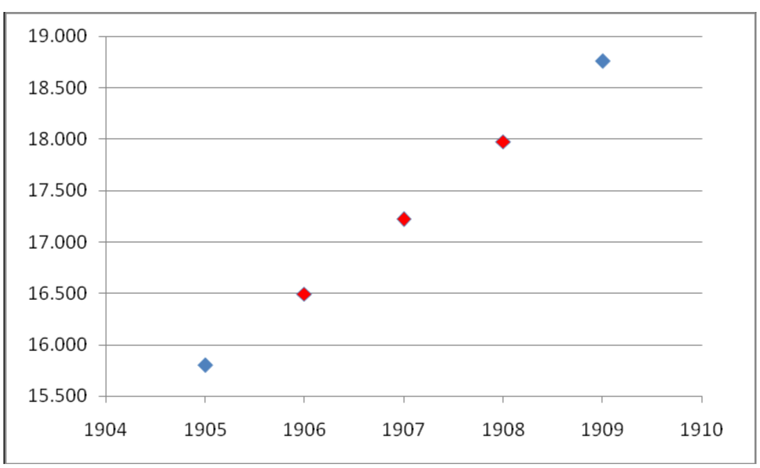
Suponiendo entonces que q=1,0439 (lo que equivale a suponer una tasa de crecimiento anual constante de 4,39 %), se aproxima el valor de la serie para los años 1906, 1907 y 1908:

$$\begin{aligned} a_1 &= 15{,}801 \times 1{,}0439 = 16494{,}66 \\ a_2 &= 15{,}801 \times 1{,}0439^2 = 17218{,}78 \\ a_3 &= 15{,}801 \times 1{,}0439^3 = 17974{,}68 \end{aligned}$$

Generamos por lo tanto la siguiente serie histórica de datos:

Año	N° de funcionarios públicos
1905	15.801
1906	16.495
1907	17.219
1908	17.975
1909	18.760

En este caso, el gráfico quedaría así (los puntos rojos señalan los datos aproximados; los puntos azules señalan los datos reales):



Ejemplo 8. Sucesión definida por recurrencia. En algunas ocasiones puede definirse un término de la sucesión en función de uno o varios de los términos anteriores. En estos casos

se dice que la sucesión está definida por recurrencia. Por ejemplo, una sucesión aritmética de valor inicial 2 y diferencia 3 puede definirse también de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Como puede apreciarse, en este caso la regla de cálculo del término enésimo de la sucesión se expresa en función del término inmediato anterior. Además, también se da el valor del primer término de la sucesión (a_0), el cual recibe el nombre de valor de arranque.

A continuación plantearemos algunas definiciones relativas al comportamiento de las sucesiones.

Definición 2. Sucesión acotada.

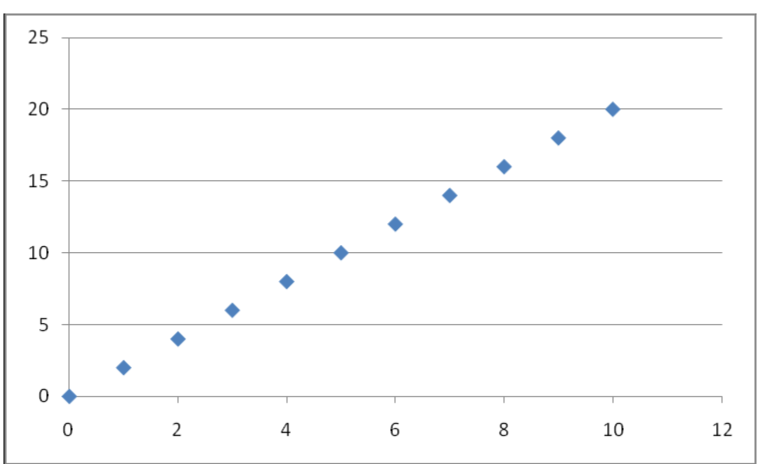
1. Diremos que una sucesión está ***acotada superiormente*** si existe $k \in R$ tal que $a_n \leq k, \forall n \in N$. Es decir, todos los términos de la sucesión son menores o iguales que un cierto número real k.

2. Diremos que una sucesión está ***acotada inferiormente*** si existe $h \in R$ tal que $a_n \geq h, \forall n \in N$. Es decir, todos los términos de la sucesión son mayores o iguales que un cierto número real h.

3. Diremos que una sucesión está ***acotada*** si lo está superior e inferiormente, es decir si existen $k, h \in R$ tal que $h \leq a_n \leq k, \forall n \in N$. En otras palabras, todos los términos de la sucesión se encuentran entre dos números reales, h y k.

Ejemplo 9.

9.A Consideremos la sucesión del ejemplo 1: $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = 2n$, cuyo gráfico volvemos a reproducir:



Puede observarse, tanto a partir de los valores que toma la sucesión como de su gráfico, que la sucesión está acotada inferiormente ($a_n \geq \underbrace{0}_{h}, \forall n \in N$), pero no superiormente (no existe $k \in R$ tal que $a_n \leq k, \forall n \in N$).

9.B Consideremos ahora la siguiente sucesión: $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Dado que $n \geq 0$, entonces $n+1 > 0$. Por lo tanto $\dfrac{1}{n+1} > \underbrace{0}_{h}, \forall n \in N$, con lo cual la sucesión está acotada inferiormente.
Por otra parte, como para $n \geq 0$ se cumple que $n+1 \geq 1$, entonces $\dfrac{1}{n+1} \leq \underbrace{1}_{k}, \forall n \in N$, con lo cual la sucesión también está acotada superiormente.

Definición 3. Sucesión monótona.

1. Diremos que una sucesión es ***monótona creciente*** si se cumple que $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in N$ (o lo que es lo mismo: $a_{n+1} - a_n \geq 0$). En otras palabras, una sucesión es monótona creciente cuando cada término es mayor o igual que el anterior.

   Si la desigualdad se cumple de manera estricta: $a_{n+1} > a_n, \forall n \in N$ ($a_{n+1} - an > 0$), se dice que la sucesión es ***estrictamente monótona creciente***.

2. Diremos que una sucesión es ***monótona decreciente*** si se cumple que $an + 1 \leq a_n, \forall n \in N$ (o lo que es equivalente $a_{n+1} - a_n < 0$). Es decir, una sucesión es monótona decreciente cuando cada término es menor o igual que el anterior.

   Si la desigualdad se cumple de manera estricta: $a_{n+1} < a_n, \forall n \in N$ ($a_{n+1} - an < 0$), se dice que la sucesión es ***estrictamente monótona decreciente***.

Ejemplo 10.

10.A Consideremos nuevamente la sucesión del ejemplo 1: $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = 2n$.
En este caso $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2n + 2 - 2n = 2 > 0$.
Por lo tanto la sucesión es estrictamente monótona creciente. Obsérvese su gráfico para corroborar la conclusión.

10.B Consideremos ahora la sucesión del ejemplo 7.B: $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.
En este caso:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{(n+1)+1} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)} \\ &= \frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0 \ \forall n \in N \end{aligned}$$

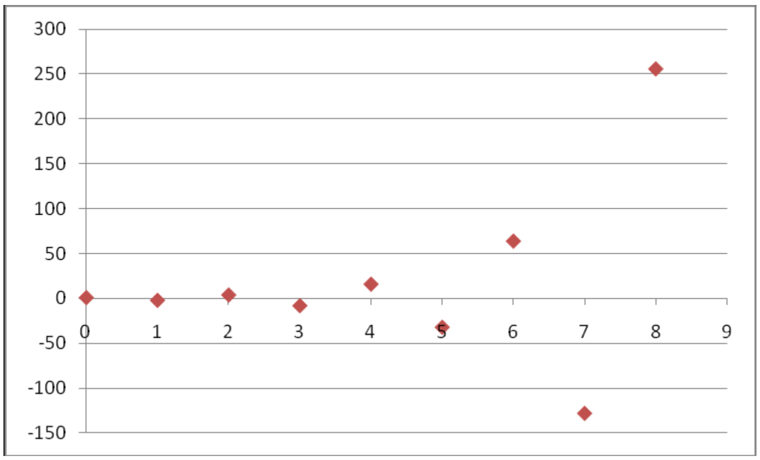
Por lo tanto la sucesión es estrictamente monótona decreciente.

10.C Sea la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = (-2)^n$.
En este caso:

$$a_{n+1} - a_n = (-2)^{n+1} - (-2)^n = (-2)^n(-2-1) = (-2)^n(-3)$$

Este resultado no tiene signo constante, pues es negativo para valores de n par, y es positivo para valores de n impar.

Si graficamos la sucesión, observamos fácilmente que no tiene un comportamiento monótono:



Definición 4. Límite de una sucesión.

Sea (a_n) una sucesión de números reales. Entonces:

1. **Sucesión convergente.** Se dice que una sucesión es **convergente** si:
   $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in R \iff$ para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$, tal que si $n \geq n_0$ entonces $a_n \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$.
   En otras palabras, decimos que la sucesión (a_n) converge a L si a partir de cierto momento la sucesión se encuentra tan cerca de L como queramos.

2. **Sucesión divergente a $+\infty$.** Se dice que una sucesión ***diverge*** a $+\infty$ si:
   $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff$ para cada $K \in R$, existe $n_0 \in N$, tal que si $n \geq n_0$ entonces $a_n > K$.
   Es decir, decimos que la sucesión (a_n) diverge a $+\infty$ si, dado un número K arbitrario, a partir de cierto momento la sucesión es siempre mayor que K.

3. **Sucesión divergente a $-\infty$.** Se dice que una sucesión **diverge** a $-\infty$ si:
   $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff$ para cada $K \in R$, existe $n_0 \in N$, tal que si $n \geq n_0$ entonces $a_n < K$.
   Es decir, decimos que la sucesión (a_n) diverge a $-\infty$ si, dado un número K arbitrario, a partir de cierto momento la sucesión es siempre menor que K.

4. **Sucesión oscilante**. Se dice que una sucesión es **oscilante** si:
   $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ no existe.

Nota: Para el cálculo del límite de una sucesión podemos aplicar en la mayoría de los casos los resultados conocidos para límites de funciones reales con dominio real.

Ejemplo 11.

11.A Consideremos la sucesión del ejemplo 1: $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = 2n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$. Por ende, la sucesión (a_n) diverge a $+\infty$.

11.B Consideremos ahora la sucesión del ejemplo 2: $(b_n)_{n\geq 3}$ tal que $b_n = \dfrac{4n+3}{n}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n+3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$. Por ende, la sucesión (b_n) converge a 4.

11.C Tengamos en cuenta por último la sucesión del ejemplo 8.C: $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = (-2)^n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$ no existe. Por lo tanto, la sucesión (a_n) es oscilante.

Proposición 1.

1. Toda sucesión convergente está acotada.
2. Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente, converge.
3. Toda sucesión monótona creciente y no acotada superiormente, diverge.
4. Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente, converge.
5. Toda sucesión monótona decreciente y no acotada inferiormente, diverge.

Ejemplo 12. Sea la sucesión del ejemplo 1: $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = 2n$. En el ejemplo 8.A demostramos que la misma es monótona creciente, mientras en el ejemplo 7.A dedujimos que la misma no está acotada superiormente. Por consiguiente, aplicando la proposición 3, podemos concluir que la sucesión diverge (lo que por otra parte queda confirmado por lo calculado en el ejemplo 9.A).

6.2. Series

Conceptos previos: sumatoria

Al manipular magnitudes o expresiones algebraicas es común que tengamos que lidiar con sumas de estas. A veces las sumas son "chicas", en el sentido de que involucran pocos términos, pero otras veces son "grandes" ya que contienen un gran número de términos. Para facilitar el trabajo con estas últimas es que se introduce el símbolo de sumatoria $\sum$.

Veamos el posible uso de este símbolo para el caso de una suma de un número no demasiado grande de términos, por ejemplo los primeros 15 números naturales:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 1 + 12 + 13 + 14 + 15$$

Esta suma puede expresarse con el símbolo de sumatoria de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{15} i$$

La utilidad principal del símbolo de sumatoria es la abreviación. Permite escribir de forma compacta expresiones que de otra forma sería más engorroso describir.

Una sumatoria tiene dos componentes que determinan su estructura:

1. La variable de control, la cual toma valores dentro de cierto rango de números naturales. En nuestro caso la variable es i y toma todos los valores naturales entre el 1 y el 15. El nombre de la variable de control y su valor inicial siempre aparecen debajo del símbolo de sumatoria, mientras que el valor final siempre aparece sobre dicho símbolo.
   La cantidad de números naturales dentro del rango de la variable de control determina la cantidad de términos de la suma, en nuestro caso 15 términos.

2. La expresión que va a ser "sumada". Esta expresión aparece a la derecha del símbolo de sumatoria y habitualmente va a contener a la variable de control. De hecho en nuestro ejemplo la expresión es simplemente la propia variable i.

Ejemplo 13.

$$\sum_{i=1}^{6} i^2$$

En este caso el rango de la variable de control está entre 1 y 6, por lo que la suma va a tener 6 términos. A su vez, cada término se calcula elevando al cuadrado a la variable de control. Por lo tanto lo que tenemos es la suma de los cuadrados de los primeros 6 números naturales.

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

Es importante tener presente que el símbolo de sumatoria únicamente permite abreviar una expresión larga, no es un cálculo del "resultado" de la suma.

Ejemplo 14. La suma de los primero 5 números pares puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{5} 2i = 2(1) + 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5)$$

La suma de los primeros 7 números impares puede escribirse como:

$$\sum_{i=0}^{6}(2i+1) = (2(0)+1)+(2(1)+1)+(2(2)+1)+(2(3)+1)+(2(4)+1)+(2(5)+1)+(2(6)+1)$$

Claramente el "nombre" o símbolo que usemos para la variable de control no es relevante, por lo que:

$$\sum_{i=1}^{5} 2i = \sum_{n=1}^{5} 2n$$

Puede darse la situación que la variable de control no aparezca en la expresión a ser sumada. En ese caso la expresión debemos considerarla como una constante y sumarla tantas veces como valores haya en el rango de la variable de control. Por ejemplo, si sumamos 10 veces el número 3, podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{10} 3$$

En otros casos va a ser necesario sumar términos de una sucesión que tenemos definida con antelación. Esto es, dada una sucesión $a_n, n \geq 0$; si queremos sumar sus primeros 25 términos podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{24} a_n$$

Un contexto similar tenemos al trabajar con matrices. Pensemos en una matriz A de tamaño 3x3.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si quisiéramos sumar las entradas de la segunda fila, podríamos expresarlo así:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{2i}$$

El último caso importante es aquel en el cual queremos expresar una suma con una cantidad no determinada de términos. Por ejemplo, la suma de los primeros n números naturales podría expresarse así: $1 + 2 + 3 + ... + n$

Una manera de expresar esta suma de forma más concisa es:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Aplicación a las Ciencias Sociales

En ciertos casos nos puede interesar sumar algunos o todos los términos de una sucesión. Por ejemplo, consideremos la siguiente sucesión, que representa el Gasto público en educación por año. Suponemos que el mismo, expresado en millones de pesos, tenía un valor de 7.000 en el año 2000 y que crece a una tasa anual de 10 %, lo cual se traduce en la siguiente sucesión (conviene que tú la chequees para comprobar que es correcta):

7.000, 7.700, 8.470, 9.317, 10.249, 11.274, 12.401, 13.641, 15.005, 16.506,...

Por lo visto en la sección previa, sabemos que la anterior sucesión es geométrica de valor inicial 7.000 y razón (1,1), la cual podemos expresar en lenguaje matemático de esta manera:

$$(a_n)_{n\geq 0} \text{ tal que } \ a_n = 7000(1{,}1)^n$$

donde n=0 corresponde al año 2000, n=1 al 2001, y así sucesivamente.
En este caso podría resultar informativo sumar los gastos públicos en educación correspondientes al período 2000-2004. En términos matemáticos:

$$\text{Gasto público en educación}_{2000-2004} = \sum_{i=0}^{4} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 42736$$

El Gasto público en educación en el período 2000-2004 sería entonces de $42.736 millones de pesos.

El símbolo $\sum$ se conoce como sumatoria y no es otro que la letra mayúscula griega Sigma.

Pero también nos podría interesar intentar sumar todos los términos de una sucesión. Obsérvese que eso implicaría sumar infinitos términos. En términos matemáticos formales intentaríamos calcular:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$$

que recibe el nombre de ***serie numérica***.

Para estudiar si podemos calcular la suma anterior, vamos a definir algunos conceptos básicos.

Definición 5. Sumas parciales.

Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales. Llamamos sucesión de sumas parciales a la sucesión $(S_n)_{n\geq 0}$ definida por:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_n$$

Ejemplo 15.

15.A Sea la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ Entonces la suma parcial enésima (S_n) es:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{a_0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{a_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{a_2} + ... + \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}_{a_{n-1}} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{a_n} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Para llegar al resultado final hemos observado que todos los demás términos de la suma se anulan.

15.B Sea una sucesión constante $(b_n)_{n\geq 0}$ tal que $b_n = 3$, con $n = 0, 1, 2, ...$
Entonces la suma parcial enésima (S_n) queda:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} 3 = \underbrace{3}_{b_0} + \underbrace{3}_{b_1} + \underbrace{3}_{b_2} + ... + \underbrace{3}_{b_n} = 3 \times (n+1)$$

15.C Sea la sucesión $(c_n)_{n\geq 2}$ tal que $c_n = \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$ con $n = 2, 3, 4, ...$
La suma parcial enésima en este caso queda:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=2}^{n} c_i = \sum_{i=2}^{n} \ln\left(\frac{i}{i-1}\right) = \sum_{i=2}^{n} [\ln(i) - \ln(i-1)] \\ &= \underbrace{[\ln(2) - \ln(2-1)]}_{c_2} + \underbrace{[\ln(3) - \ln(3-1)]}_{c_3} + \underbrace{[\ln(4) - \ln(4-1)]}_{c_4} + ... + \underbrace{[\ln(n) - \ln(n-1)]}_{c_n} \\ &= [\ln(n) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}] = \ln(n) \end{aligned}$$

<u>Definición 6.</u> **Series convergentes, divergentes y oscilantes.**

Sea $(a_n)_n \geq 0$ una sucesión de números reales y $(S_n)_n \geq 0$ su correspondiente sucesión de sumas parciales.

1. Si $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in R$, entonces se dice que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ***converge*** y su suma es S:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$$

2. Si $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ (o $-\infty$), entonces se dice que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ***diverge***. En este caso no le asignamos ningún valor.

3. Si $\lim_{n \to +\infty} S_n$ no existe, entonces se dice que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ***oscila***. En este caso tampoco no le asignamos ningún valor.

<u>**Ejemplo 16.**</u>

16.A Dada la sucesión del ejemplo **15.A** $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$, queremos clasificar la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. En el ejemplo 15.A probamos que la suma parcial enésima generada por la sucesión (a_n) era:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Si calculamos el límite con n tendiendo a $+\infty$, se obtiene:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1$$

Entonces se concluye que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge y su suma vale 1.

16.B Dada la sucesión del ejemplo **15.B** $(b_n)_{n\geq 0}$ tal que $b_n = 3$, con $n = 0, 1, 2, ...$, queremos clasificar la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Para ello precisamos en primer lugar la suma parcial enésima generada por esta sucesión, la cual fue calculada en el ejemplo 15.B:

$$S_n = 3 \times (n+1)$$

Si calculamos el límite con n tendiendo a $+\infty$, se obtiene:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 3 \times (n+1) = +\infty$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

16.C Queremos clasificar ahora la siguiente serie:[4] $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$.

Deduzcamos en primer lugar el valor de la suma parcial enésima. Para ello calcularemos antes algunas sumas parciales: S_1, S_2, S_3, S_4.

$$\begin{aligned}
&S_1 = (-1)^1 = -1\\
&S_2 = (-1)^1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0\\
&S_3 = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = -1\\
&S_4 = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 = 0
\end{aligned}$$

Se deduce por lo tanto que:

$$S_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por ende: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ no existe, con lo cual la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ oscila.

Proposición 2. Condición necesaria de convergencia.

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, entonces $(a_n) \to 0$.

Proposición 3. Condición suficiente de divergencia.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ existe y es distinto de $0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ***diverge***.

Definición 7. Serie geométrica.

Se conoce como serie geométrica a la generada por una sucesión geométrica $(a_n)_n \geq 0$ tal que $a_n = q^n, (q \in R, q \neq 1)^5$.

Clasificaremos entonces la siguiente serie: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

Para ello debemos calcular el $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, donde S_n es:

$$S_n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^n$$

Si multiplicamos S_n por q, se obtiene:

$$q \times S_n = q \times (q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + ... + q^n) = q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n+1}$$

De lo cual se deduce que:

$$S_n - q \times S_n = \underbrace{q^0}_{=1} - q^{n+1} \Rightarrow (1-q)S_n = 1 - q^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ con } n \geq 0, q \neq 1$$

[4] Este ejemplo fue tomado de Pelaez (2009), p.235.

[5] En el caso en que $q = 1$, el resultado es una serie generada por una sucesión constante, como la trabajada en el ejemplo 16.B.

Una vez que tenemos la suma parcial enésima, nos resta calcular el límite con n tendiendo a $+\infty$, discutiendo según el valor de q:

1. Si $|q| < 1, q^{n+1} \underbrace{\to}_{n\to+\infty} 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\overbrace{q^{n+1}}^{\to 0}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$. En este caso la serie geométrica converge y $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

2. Si $q > 1, q^{n+1} \underbrace{\to}_{n\to+\infty} +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\overbrace{q^{n+1}}^{\to+\infty}}{1-q} = +\infty$. En este caso la serie geométrica diverge.

3. Si $q \leq -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1}$ no existe $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ no existe. Por lo tanto, la serie geométrica oscila.

En resumen, si queremos clasificar una serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$:

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge si y solo si $|q| < 1$. En este caso, además, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ diverge si $q > 1$.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ oscila si $q \leq -1$.

<u>Nota:</u> Obsérvese que las series $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n-1}$ y, en general, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n-a}$, con $a \in N, a \geq 1$ son idénticas.

<u>Ejemplo 17.</u>

Se quiere clasificar las siguientes series geométricas:

$$\text{A. } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ B. } \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n, \text{ C. } \sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n$$

17.A $|q| = 1/3 < 1$. Entonces, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ converge y, además,

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{3}{2}$

17.B $q = 2 > 1$. Entonces, $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$ diverge.

17.C $q = -3 \leq -1$. Entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n$ oscila.

A continuación presentaremos someramente algunas propiedades de las series.

Propiedad de Aditividad.

Sean $(an)_n \geq 0$ una sucesión, r un número natural mayor o igual que 1. Entonces las series $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=r}^{+\infty} a_n$ tienen el mismo comportamiento (ambas convergen, ambas divergen o ambas oscilan).

En caso en que ambas converjan, se cumple además:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + ... + a_{r-1} + \sum_{n=r}^{+\infty} a_n$$

Ejemplo 18.

Consideremos la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Sabemos, por el ejemplo **17.A** que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge. Por lo tanto, por la propiedad de aditividad, se concluye que la serie también converge.

Además, podemos calcular el valor de su suma:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{=\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Entonces:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Propiedad de linealidad.

Sean $(an)_n \geq 0$ y $(bn)_n \geq 0$ dos sucesiones de números reales y k un número real. Entonces:

1. Si $k \neq 0$, las series $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} k \times a_n$ tienen el mismo comportamiento. Además, en caso de que converjan, se cumple que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k \times a_n = k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)$$

.

2. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ converge y además:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Ejemplo 19.

Queremos clasificar la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ y, si corresponde, calcular su suma.

Sabemos por el ejemplo 18 que $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ converge y su suma vale $1/6$.

Entonces, por la propiedad de linealidad, se concluye que la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ también converge. Además, su suma vale:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 5\left(\frac{1}{3}\right)^n = 5\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$