Repartido práctico Nº3: Sucesiones y sumatorias

Matemática 2 - FCS - UDELAR

2024

Ejercicio 1.
En todos los casos para estudiar la monotonía de la sucesión, se analizó el signo de $a_{n+1} - a_n$

1. $a_1 = 2$ $a_2 = 4$ $a_3 = 8$ $a_4 = 16$ $a_5 = 32$
2. $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{3}$ $a_4 = \frac{1}{4}$ $a_5 = \frac{1}{5}$
3. $a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{4}$ $a_3 = \frac{1}{8}$ $a_4 = \frac{1}{16}$ $a_5 = \frac{1}{32}$
4. $a_1 = \frac{-1}{2}$ $a_2 = \frac{1}{4}$ $a_3 = \frac{-1}{8}$ $a_4 = \frac{1}{16}$ $a_5 = \frac{-1}{32}$
5. $a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{2}{3}$ $a_3 = \frac{3}{4}$ $a_4 = \frac{4}{5}$ $a_5 = \frac{5}{6}$
6. $a_1 = 2$ $a_2 = 4$ $a_3 = 8$ $a_4 = 16$ $a_5 = 32$
7. $a_1 = 5$ $a_2 = \frac{19}{4}$ $a_3 = \frac{43}{9}$ $a_4 = \frac{77}{16}$ $a_5 = \frac{121}{25}$

Ejercicio 2.
Un programa del gobierno costaba a los contribuyentes \$ 2,5 millones en 2024. Ante el reciente panorama de desaceleración económica, se resuelve realizar un recorte anual del mismo de 20 %.
Se pide:

1. $Costo_{2025} = Costo_{\text{un año después}} = 2$ y $Costo_{2026} = 1,6$.
2. $Costo_{\text{n años después}} = 2,5.(0,8)^n \; n \geq 0$
3. $Costo_{\text{n años después}} = 0,171800 \Rightarrow n \approx 12$
   El costo será de \$ 171800 en 2036.

Ejercicio 3.

1. Se espera que concurran 55.125 turistas.
2. $t_n = 50000(1,05)^n$ con $n = 0, 1, 2$
   donde t = Número de turistas que concurren y n = años transcurridos desde 2022

   Se trata de una sucesión geométrica de razón 1,05.

3.
$$\text{Total de ingresos}_{2022-2041} = \sum_{n=0}^{19} 500t_n = \sum_{n=0}^{19} 500.\,50000(1,05)^n =$$
$$025000000 \sum_{n=0}^{19}(1,05)^n = 25000000\frac{1-(1,05)^20}{1-05} \approx 826648853$$

Ejercicio 4.

1. Escriba la fórmula ó expresión para calcular la población entre comienzos de 2020 y comienzos de 2050.

   $P(n)$=población n años a partir de 2020 ; $0 \leq n \leq 30$.
   $$P(n) = 3{,}7(1{,}05)^n$$

2. Calcule cual sería la población del país a finales de de 2035 y 2045.
   $$P(15) = 3{,}7(1,05)^{15} = 7{,}7$$
   $$P(25) = 3{,}7(1,05)^{25} = 12{,}5$$

3. Calcule el año en que se alcanzará una población de 9,8 (en millones).
   $$P(n) = 3{,}7(1{,}05)^n = 9{,}8 \Rightarrow n \approx 19{,}96, \quad \text{final del año 2039}$$

4. El gobierno afirma que si las políticas son exitosas, a comienzos de 2050 el país alcanzaría una población similar a la que actualmente tienen países tan disimiles como Kazajistán, Holanda, Guatemala o Ecuador, con una población superior a 17 millones de habitantes. ¿Es verdadera esta afirmación? Justifique su respuesta.
   $$P(30) = 3{,}7(1{,}05)^{30} = 16$$
   Por lo tanto, la afirmación es falsa.

5. Calcule los ingresos acumulados de la población en el período 2020-2050 (de comienzos de 2020 a final de 2049), suponiendo que cada habitante genera anualmente \$100 de ingresos.

   Para calcular el ingreso generado en cada año, consideramos la población a comienzos de dicho año:
   $$\sum_{0}^{29}(100) \times 3{,}7(1{,}05)^n = 370 \times \sum_{0}^{29}(1{,}05)^n = 370 \times 66{,}44 = 24.582{,}8 \quad \text{(en millones de \$)}$$
   Donde:
   $$\sum_{0}^{29}(1{,}05)^n = \frac{(1-(1{,}05)^{30})}{(1-1{,}05)} = 66{,}44$$

Ejercicio 5.

1. Escriba la fórmula para calcular la matrícula universitaria (MU) durante el período que se aplicará el programa.

   $MU(n)$ = matrícula universitaria n años a partir de 2020 .

   $$MU(n) = 120.000(1{,}045)^n$$

2. ¿Cuál sería la MU a los 5 años de aplicado el programa? ¿Y a los 10 años?

   $$MU(5) = 120.000(1{,}045)^5 = 149.542$$
   $$MU(10) = 120.000(1{,}045)^{10} = 186.356$$

3. Calcule el año en que se alcanzará una MU de 265.017 estudiantes.

   $$MU(n) = 120.000(1{,}045)^n = 265.017 \Rightarrow n = 17{,}9, \quad \text{final del año 2037}$$

4. Existe un preacuerdo entre todos los partidos políticos y la UdelaR para renovar el programa si el mismo resulta ser muy exitoso y se logra alcanzar una MU superior a 300.000 estudiantes en el año de su finalización. Indique si el programa será renovado. Justifique su respuesta.

   $$MU(20) = 120.000(1{,}045)^{20} = 289.406 < 300.000$$

   El acuerdo no será renovado.

5. Si se espera que cada estudiante universitario genere anualmente \$5 de ingresos con destino al Fondo de Solidaridad, calcule los ingresos acumulados de la MU desde comienzo del 2020 hasta comienzos del 2040.

   Suma parcial de la serie geométrica:

   $$MU(20) = \sum_{0}^{19}(5)120.000(1{,}045)^n = 600.000\sum_{0}^{19}(1{,}045)^n = 600.000 \times 33{,}8 \approx 18.822.00$$

   donde:

   $$\sum_{0}^{19}(1{,}045)^n = \frac{1 - 1{,}045^{20}}{1 - 1{,}045} \approx 31{,}37$$

   Los ingresos acumulados al Fondo de Solidaridad en el año 2040 será de aproximadamente 18.822.000 pesos.

Ejercicio 6.

1.

$$\begin{aligned} 1000(1{,}06)^n &= 6000 \\ 1{,}06^n &= 6 \\ n &= log_{1,06}6 \approx 30{,}7 \end{aligned}$$

Se alcanzaran los 6000 visitantes mensuales en el mes 31 desde la inauguración.

2.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{47} 1000(1{,}06)^n &= 1000 \sum_{n=0}^{47} (1{,}06)^n \\ &= 1000 \left(\frac{1{,}06^4 8 - 1}{1{,}06 - 1} \right) \\ &\approx 256.564 \end{aligned}$$

3. Desde comienzos de del 2020 hasta finales del 2021 la cantidad total de visitantes fue de

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{23} 1000(1{,}06)^n &= 1000 \left(\frac{1{,}06^{24} - 1}{1{,}06 - 1} \right) \\ &\approx 50.815 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en el periodo desde comienzos de 2022 hasta finales de 2023 la cantidad total de visitantes fue de

$$256.564 - 50.815 \approx 205.749$$

4. Necesitamos determinar el valor de k tal que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k} 1000(1{,}06)^n &= 600.000 \\ 1000 \left(\frac{1{,}06^{k+1} - 1}{1{,}06 - 1} \right) &= 600.000 \\ \frac{1{,}06^{k+1} - 1}{0{,}06} &= 600 \\ 1{,}06^{k+1} &= 37 \\ k &= (log_{1,06}37) - 1 \approx 60{,}9 \end{aligned}$$

Ejercicio 7.

1. $$\frac{ventas\ Marzo}{ventas\ Febrero} = \frac{1210}{1100} = 1{,}1$$

   El crecimiento es de 10 % mensual.

   $$\frac{ventas\ Febrero}{ventas\ Enero} = 1{,}1$$

   $$ventas\ Enero = \frac{1100}{1{,}1} = 1000$$

2. $a_n = 1000(1{,}1)^n$ para $0 \leq n \leq 23$

3. $$a_n = \begin{cases} 1000(1{,}1)^n & \text{si } 0 \leq n \leq 23 \\ 8954{,}3 & \text{si } 23 < n \leq 35 \end{cases}$$

4. El total de ventas es

   $$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{35} a_n &= \sum_{n=0}^{23} a_n + \sum_{n=24}^{35} a_n \\ &\approx 1000\left(\frac{1{,}1^{24}-1}{1{,}1-1}\right) + (8954{,}3)12 \\ &\approx 195.949 \end{aligned}$$

5. Necesitamos determinar el valor de k tal que

   $$\begin{aligned} 5.000\left(\sum_{n=0}^{k} 1000(1{,}1)^n\right) &= 200.000.000 \\ \left(\frac{1{,}1^{k+1}-1}{1{,}1-1}\right) &= 40 \\ k &= (log_{1{,}1}5) - 1 \approx 15{,}9 \end{aligned}$$