Ejercicio 1

La siguiente matriz representa un juego estático entre el Jugador A y el Jugador B. Los números entre paréntesis representan las utilidades de los jugadores. El número a la izquierda de la coma es la utilidad del Jugador A y el de la derecha la utilidad del Jugador B.

		Jugador B		
		B ₁	B ₂	B ₃
Jugador A	A ₁	(3, 2)	(1, 0)	(2, 0)
	A ₂	(2, 1)	(3, 2)	(1, 0)
	A ₃	(1, 1)	(-1, 2)	(1, 1)

- 1.1 Determine si la matriz tiene estrategias estrictamente dominadas y elimínelas. Justifique.
- 1.2 Determine en la matriz (eventualmente reducida) todos los equilibrios de Nash, tanto en estrategias puras como mixtas¹. Justifique.

Ejercicio 2

La siguiente matriz representa un juego estático entre el Jugador 1 y el Jugador 2. Los números entre paréntesis representan las utilidades de los jugadores. El número a la izquierda de la coma es la utilidad del Jugador 1 y el de la derecha la utilidad del Jugador 2.

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	A	(12, 2)	(3, 9)
	B	(5, 8)	(4, 2)

- 2.1 Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias puras e identifíquelos. Justifique.
- 2.2 Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias mixtas, para lo cual asuma que el Jugador 1 elije A con una probabilidad p , y que el jugador 2 elije jugar C con una probabilidad q . Identifique el EN en estrategias mixtas. Justifique.

¹ Para el caso de estrategias mixtas, asuma que el Jugador A elije su primera jugada con una probabilidad $0 \leq p \leq 1$, y que el jugador B elije jugar su primera estrategia con una probabilidad $0 \leq q \leq 1$.

Pauta de respuesta

Ejercicio 1

1.1

		Jugador B		
		B ₁	B ₂	B ₃
Jugador A	A ₁	(3 , 2)	(1 , 0)	(2 , 0)
	A ₂	(2 , 1)	(3 , 2)	(1 , 0)
	A ₃	(1 , 1)	(-1 , 2)	(1 , 1)

Primero observo las estrategias del Jugador A y empiezo comparando A₁ con A₂, observando que no hay dominación entre ellas. A continuación, comparo A₁ con A₃ y observo que A₃ es estrictamente dominada, pues el Jugador A siempre obtiene mejores pagos jugando A₁ que A₃. En consecuencia, elimino A₃ y la matriz reducida queda del siguiente modo:

		Jugador B		
		B ₁	B ₂	B ₃
Jugador A	A ₁	(3 , 2)	(1 , 0)	(2 , 0)
	A ₂	(2 , 1)	(3 , 2)	(1 , 0)

Ahora observo las estrategias del Jugador B y empiezo comparando B₁ con B₂, observando que no existe dominación, pues no hay una de ambas estrategias que asegure al Jugador B siempre los mejores pagos. A continuación, comparo B₁ con B₃ y observo que B₁ domina estrictamente a B₃, pues la primera siempre reporta mejores pagos que la segunda. En consecuencia, la elimino, y llegando a la siguiente matriz reducida:

		Jugador B	
		B ₁	B ₂
Jugador A	A ₁	(3 , 2)	(1 , 0)
	A ₂	(2 , 1)	(3 , 2)

Vuelvo a observar las estrategias del Jugador A y veo que no existen estrategias estrictamente dominadas para eliminar. Lo mismo sucede con el Jugador B, por lo que no es posible reducir más la matriz.

1.2

Sobre la base de la matriz reducida, busco si existe alguna (o algunas) combinación de mejores respuestas para saber si existe equilibrio de Nash en estrategias puras. Para eso, marco en amarillo los mejores pagos del Jugador A y en verde los del Jugador B. Observo que el juego tiene 2 equilibrios de Nash en estrategias puras en los siguientes perfiles de estrategias puras:

$$\text{ENEP} = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2)\}$$

		Jugador B		
		B ₁	B ₂	
Jugador A	A ₁	(3, 2)	(1, 0)	<i>p</i>
	A ₂	(2, 1)	(3, 2)	<i>(1-p)</i>
		<i>q</i>	<i>(1-q)</i>	

Ahora, para determinar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas (ENEM) sobre la base de la matriz reducida, debo hallar un valor de p que vuelve indiferente al Jugador B entre jugar B₁ y B₂, y un valor de q que vuelve indiferente al Jugador A entre jugar A₁ y A₂. Para ello, lo primero es calcular la utilidad esperada para ambos jugadores de jugar cada una de sus estrategias disponibles. Comienzo con el Jugador A:

$$UE_{\text{Jugador A}}(A_1) = 3q + 1(1-q) \Rightarrow 3q + 1 - q \Rightarrow 2q + 1$$

$$UE_{\text{Jugador A}}(A_2) = 2q + 3(1-q) \Rightarrow 2q + 3 - 3q \Rightarrow 3 - q$$

Ahora igualo ambas utilidades esperadas, para hallar el valor de q que vuelve indiferente al Jugador A:

$$2q + 1 = 3 - q \Rightarrow q = 2/3$$

Ahora hago lo mismo para el Jugador B:

$$UE_{\text{Jugador B}}(B_1) = 2p + 1(1-p) \Rightarrow 2p + 1 - p \Rightarrow p + 1$$

$$UE_{\text{Jugador B}}(B_2) = 0 \cdot p + 2(1-p) \Rightarrow 2 - 2p$$

Igualando ambas utilidades esperadas:

$$p + 1 = 2 - 2p \Rightarrow p = 1/3$$

Existe una combinación de mejores respuestas en estrategias mixtas cuando el Jugador A juega A₁ con una probabilidad de 1/3 y A₂ con una probabilidad de (1 - 1/3) = 2/3, y el Jugador B juega B₁ con una probabilidad de 2/3 y B₂ con una probabilidad de (1 - 2/3) = 1/3.

$$\text{ENEM} = \{(1/3A_1 ; 2/3A_2), (2/3B_1 ; 1/3B_2)\}$$

Ejercicio 2

1.1

		Jugador 2		
		C	D	
Jugador 1	A	(12, 2)	(3, 9)	p
	B	(5, 8)	(4, 2)	$(1-p)$
		q	$(1-q)$	

Primero observo que no existen estrategias estrictamente dominadas, por lo que no es posible resolver el juego por dominación, ni reducir la matriz. A continuación, paso a buscar combinaciones de mejores respuestas para hallar equilibrios de Nash en estrategias puras (ENEP). Pinto los mejores pagos del J1 en amarillo, y los del J2 en verde. No existen combinaciones de mejores respuestas, por lo que el juego no tiene ENEP.

Paso entonces a hallar el ENEM. Comienzo por el J1:

$$UE_{\text{Jugador1}}(A) = 12q + 3(1-q) \Rightarrow 9q + 3$$

$$UE_{\text{Jugador1}}(B) = 5q + 4(1-q) \Rightarrow q + 4$$

Ahora igualo ambas utilidades esperadas, para hallar el valor de q que vuelve indiferente al J1:

$$9q + 3 = q + 4 \Rightarrow q = 1/8$$

Ahora hago lo mismo para el J2:

$$UE_{\text{Jugador2}}(C) = 2p + 8(1-p) \Rightarrow 8 - 6p$$

$$UE_{\text{Jugador2}}(D) = 9p + 2(1-p) \Rightarrow 7p + 2$$

Iguando ambas utilidades esperadas:

$$8 - 6p = 7p + 2 \Rightarrow p = 6/13$$

Existe una combinación de mejores respuestas en estrategias mixtas cuando el J1 juega A con una probabilidad de $6/13$ y B con una probabilidad de $7/13$, y el J2 juega C con una probabilidad de $1/8$ y D con una probabilidad de $7/8$.

$$\text{ENEM} = \{(6/13A ; 7/13B) , (1/8C ; 7/8D)\}$$