UN PRIMER CURSO DE TEORÍA DE JUEGOS

GIBBONS

ANTONI BOSCH EDITOR

Robert Gibbons es profesor de la Johnson Graduate School of Management de la Universidad de Cornell

UN PRIMER CURSO DE TEORÍA DE JUEGOS

L03406-E3
cupos

519.3
GIBBp
g. 6

ROBERT GIBBONS
Universidad de Cornell

UN PRIMER CURSO DE TEORÍA DE JUEGOS

Traducción de
Paloma Calvo
y Xavier Vilà
Universidad de Northwestern

519.3 GIBBp
[Un] primer curso de teor...
Gibbons, Robert
FCS/L3406/E3

Antoni Bosch editor

Facultad de Ciencias Sociales
Departamento de Economía
Biblioteca

Publicado por Antoni Bosch, editor
Manuel Girona, 61 – 08034 Barcelona
Tel. (93) 205 26 06 – Fax (93) 280 48 02

Título original de la obra:
A Primer in Game Theory

© 1992 by Robert Gibbons
© de la edición en castellano: Antoni Bosch, editor, S.A.

ISBN: 84-85855-69-8
Depósito legal: B. 30.801-1993

Diseño de la cubierta: Enric Satué

Composición: J. A. Alemany
Impresión: Litografía Rubio, S.A.

Primera edición: Octubre de 1993

No se permite la reproducción total o parcial de este libro, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, sea éste electrónico, mecánico, reprográfico, gramofónico u otro, sin el permiso previo y por escrito del editor.

CONTENIDO

Prefacio IX

1 Juegos estáticos con información completa 1
1.1 Teoría básica: Juegos en forma normal y equilibrio de Nash 2
1.1.A Representación de los juegos en forma normal 2
1.1.B Eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas 4
1.1.C Fundamentación y definición del equilibrio de Nash 8
1.2 Aplicaciones 15
1.2.A Modelo de duopolio de Cournot 15
1.2.B Modelo de duopolio de Bertrand 21
1.2.C Arbitraje de oferta final 23
1.2.D El problema de los ejidos 27
1.3 Teoría avanzada: Estrategias mixtas y existencia de equilibrio 29
1.3.A Estrategias mixtas 29
1.3.B Existencia del equilibrio de Nash 33
1.4 Lecturas adicionales 47
1.5 Ejercicios 48
1.6 Referencias 51

2 Juegos dinámicos con información completa 53
2.1 Juegos dinámicos con información completa y perfecta 55
2.1.A Teoría: Inducción hacia atrás 55
2.1.B El modelo de duopolio de Stackelberg 59
2.1.C Salarios y nivel de empleo en una empresa con fuerte implantación salarial 62
2.1.D Negociación secuencial 66
2.2 Juegos en dos etapas con información completa pero imperfecta 69

2.2.A Teoría: Perfección en subjuegos 69
2.2.B Pánico bancario 71
2.2.C Aranceles y competencia internacional imperfecta 73
2.2.D Torneos 77
2.3 Juegos repetidos 80
2.3.A Teoría: Juegos repetidos en dos etapas 80
2.3.B Teoría: Juegos repetidos infinitamente 87
2.3.C Colusión entre duopolistas de Cournot 101
2.3.D Salarios de eficiencia 106
2.3.E Política monetaria estable en el tiempo 112
2.4 Juegos dinámicos con información completa pero imperfecta 115
2.4.A Representación de los juegos en forma extensiva 115
2.4.B Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos 122
2.5 Lecturas adicionales 129
2.6 Ejercicios 130
2.7 Referencias 139

3 Juegos estáticos con información incompleta 143
3.1 Teoría: juegos bayesianos estáticos y equilibrio bayesiano de Nash 144
3.1.A Un ejemplo: Competencia a la Cournot bajo información asimétrica 144
3.1.B Representación en forma normal de juegos bayesianos estáticos 146
3.1.C Definición del equilibrio bayesiano de Nash 150
3.2 Aplicaciones 152
3.2.A Revisión de las estrategias mixtas 152
3.2.B Una subasta 155
3.2.C Una subasta doble 159
3.3 El principio de revelación 164
3.4 Lecturas adicionales 169
3.5 Ejercicios 169
3.6 Referencias 172

4 Juegos dinámicos con información incompleta 175
4.1 Introducción al equilibrio bayesiano perfecto 177
4.2 Juegos de señalización 185
4.2.A Equilibrio bayesiano perfecto en juegos de señalización 185

4.2.B Señalización en el mercado de trabajo 192
4.2.C Inversión empresarial y estructura de capital 207
4.2.D Política monetaria 210
4.3 Otras aplicaciones del equilibrio bayesiano perfecto 213
4.3.A Juegos con parloteo (*cheap-talk games*) 213
4.3.B Negociación sucesiva bajo información asimétrica 221
4.3.C La reputación en el dilema de los presos repetido finitamente 227
4.4 Refinamientos del equilibrio bayesiano perfecto 236
4.5 Lecturas adicionales 248
4.6 Ejercicios 249
4.7 Referencias 257

Índice analítico 261

PREFACIO

La teoría de juegos es el estudio de problemas de decisión multipersonales. Tales problemas se plantean frecuentemente en economía. Como es bien sabido, por ejemplo, en situaciones de oligopolio se dan típicamente problemas de este tipo (cada empresa debe tener en cuenta lo que harán las demás). Pero muchas otras aplicaciones de teoría de juegos surgen en campos ajenos a la organización industrial. A nivel micro económico, muchos modelos de intercambio (como los de negociación y de subasta) utilizan teoría de juegos. A un nivel de agregación intermedio, y en el campo de la economía laboral o de la economía financiera se utiliza la teoría de juegos en modelos de comportamiento de las empresas en los mercados de factores, o para dilucidar problemas de decisión multipersonales dentro de ellas: varios trabajadores compitiendo por un ascenso, varios departamentos compitiendo por unos mismos recursos. Finalmente, al nivel más alto de agregación, en el campo de la economía internacional, se utiliza en modelos en los que los países compiten (o coluden) en sus decisiones arancelarias y, en general, en una política económica exterior; o en macroeconomía, para analizar los resultados de la política monetaria cuando el gobierno y los agentes que determinan los salarios o los precios se comportan estratégicamente.

Este libro está concebido para presentar la teoría de juegos a quienes más tarde construirán (o, al menos, consumirán) los modelos de la teoría de juegos en los ámbitos aplicados de la economía. Se han procurado resaltar en él las aplicaciones de la teoría, tanto al menos como la propia teoría, por tres razones. En primer lugar, porque las aplicaciones ayudan a enseñar la teoría. En segundo lugar, porque las aplicaciones ilustran el proceso de construcción de modelos; es decir, el proceso de traducción de la descripción informal de una determinada situación a un problema formal de teoría de juegos para ser analizado. En tercer lugar, porque las diversas aplicaciones permiten comprobar que problemas similares surgen en áreas diferentes del análisis económico, y que los mismos instrumentos de teoría de juegos pueden aplicarse en cada situación. Para

subrayar el amplio alcance potencial de los juegos los ejemplos habituales de organización industrial han sido sustituidos en gran medida por aplicaciones en el ámbito de la economia laboral, de la macroeconomía y de otros campos aplicados del análisis económico.[1]

Discutiremos cuatro tipos de juegos: juegos estáticos con información completa, juegos dinámicos con información completa, juegos estáticos con información incompleta y juegos dinámicos con información incompleta. (Un juego tiene información incompleta si un jugador no conoce las ganancias de otro jugador, como ocurre en una subasta cuando uno de los licitadores no sabe cuánto está dispuesto a pagar otro licitador por el bien subastado.) Correspondiendo a estas cuatro clases de juegos habrá cuatro nociones de equilibrio: equilibrio de Nash, equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, equilibrio bayesiano de Nash y equilibrio bayesiano perfecto.

Existen dos maneras (relacionadas) de entender estos conceptos de equilibrio. Primero, se pueden entender como sucesiones de conceptos de equilibrio cada vez más poderosos, donde las definiciones más poderosas (es decir, más restrictivas) constituyen intentos de eliminar equilibrios poco plausibles permitidos por nociones de equilibrio más débiles. Veremos, por ejemplo, que el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es más poderoso que el equilibrio de Nash, y que el equilibrio bayesiano perfecto es a su vez más poderoso que el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Segundo, puede afirmarse que el concepto de equilibrio relevante es siempre el equilibrio bayesiano perfecto (o quizás un concepto de solución aún más poderoso), aunque éste es equivalente al equilibrio de Nash en juegos estáticos con información completa, equivalente a la perfección en subjuegos en juegos dinámicos con información completa (y perfecta) y equivalente al equilibrio bayesiano de Nash en juegos estáticos con información incompleta.

Este libro puede utilizarse de dos formas. A los estudiantes de economía de primer año de doctorado, muchas de las aplicaciones les serán ya familiares, por lo que la parte de teoría de juegos se puede cubrir en medio semestre, dejando muchas de las aplicaciones para ser estudiadas fuera de clase. A los estudiantes de licenciatura, conviene presentarles la teoría un poco más despacio, y cubrir en clase virtualmente todas las aplicaciones. El prerrequisito matemático fundamental es el cálculo diferencial en una variable; los rudimentos de probabilidad y análisis se introducen a medida que se necesitan.

[1] Una buena fuente de aplicaciones de teoría de juegos en el ámbito de la organización industrial es *Teoría de la organización industrial*, de Tirole (Ariel, 1990).

Aprendí teoría de juegos con David Kreps, John Roberts y Bob Wilson durante mis estudios de doctorado, y con Adam Brandemburger, Drew Fudenberg y Jean Tirole más adelante. A ellos debo la parte teórica de este libro. El énfasis en las aplicaciones y otros aspectos del estilo pedagógico del libro, en cambio, se los debo en gran parte a los estudiantes del departamento de economía del M.I.T. quienes, de 1985 a 1990, inspiraron y moldearon los cursos que han culminado en este libro. Estoy muy agradecido a todos estos amigos por las ideas que han compartido conmigo y el estímulo que siempre me han otorgado, así como por los numerosos comentarios útiles al borrador del libro que he recibido de Joe Farrell, Milt Harris, George Mailath, Matthew Rabin, Andy Weiss y varios críticos anónimos. Finalmente, me complace reconocer los consejos y apoyo que he recibido de Jack Repcheck de Princeton University Press y la ayuda financiera de una beca Olin en economía del National Bureau of Economic Research.

1. JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

En este capítulo consideramos juegos simples de la siguiente forma: primero los jugadores forman decisiones simultáneamente; a continuación reciben sus ganancias, que dependen de la combinación de acciones que acaban de elegir. Dentro de la clase de estos juegos estáticos (o de decisión simultánea), restringimos nuestra atención a los juegos con *información completa*. Es decir, la función de ganancias de cada jugador (la función que determina la ganancia de cada jugador a partir de la combinación de acciones elegidas por los jugadores) es conocida por los jugadores. Estudiamos los juegos dinámicos (o de toma de decisiones sucesivas) en los capítulos 2 y 4, y los juegos con información incompleta (juegos en los cuales algún jugador no está seguro de la función de ganancias de otro jugador, como ocurre en una subasta en la cual lo que cada licitador está dispuesto a pagar por el bien subastado es desconocido por los otros licitadores) en los capítulos 3 y 4.

En la sección 1.1 entramos en las dos cuestiones básicas de la teoría de juegos: cómo describir un juego y cómo resolver el problema de teoría de juegos resultante. Con este fin describimos los instrumentos que utilizaremos para analizar los juegos estáticos con información completa, y sentaremos las bases de la teoría que utilizaremos para analizar juegos más ricos en capítulos posteriores. Definimos también la *representación en forma normal* de un juego y la noción de *estrategia estrictamente dominada*. Demostramos que algunos juegos pueden resolverse mediante la aplicación de la idea de que los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, pero también que en otros juegos este enfoque da lugar a predicciones muy imprecisas sobre el desarrollo del juego (algunas veces tan imprecisa como la afirmación de que "cualquier cosa puede ocurrir"). Después, definimos el *equilibrio de Nash*, un concepto de solución que da pie a predicciones mucho más precisas en una clase de juegos muy amplia.

En la sección 1.2, utilizando los instrumentos desarrollados en la sección previa, analizamos cuatro aplicaciones: el modelo de competencia imperfecta de Cournot (1838), el modelo de competencia imperfecta de Bertrand (1883), el modelo de arbitraje de oferta final de Farber (1980) y el problema de los ejidos (discutido por Hume [1739] y otros). En cada aplicación, en primer lugar traducimos la descripción informal del problema a una representación en la forma normal del juego y después hallamos su equilibrio de Nash. (Cada una de estas aplicaciones tiene un único equilibrio de Nash, pero discutimos ejemplos en los cuales esto no ocurre.)

En la sección 1.3 volvemos a la teoría. En primer lugar definimos la noción de *estrategia mixta*, que interpretamos en términos de la falta de certeza de un jugador con respecto a lo que otro jugador hará. Seguidamente, enunciamos y discutimos el teorema de Nash (1950), el cual garantiza que un equilibrio de Nash (que puede incluir estrategias mixtas) existe en una amplia clase de juegos. Puesto que presentamos primero la teoría básica en la sección 1.1, las aplicaciones en la sección 1.2 y, finalmente, más teoría en la sección 1.3, resulta evidente que el conocimiento de la teoría incluida en la sección 1.3 no constituye un requisito para entender las aplicaciones de la sección 1.2. Por otra parte, la idea de estrategia mixta y la existencia de equilibrio aparecen (ocasionalmente) en capítulos posteriores.

Cada capítulo concluye con ejercicios, sugerencias de lectura adicional y referencias.

1.1 Teoría básica: Juegos en forma normal y equilibrio de Nash

1.1.A Representación de los juegos en forma normal

En la representación de un juego en forma normal cada jugador elige de forma simultánea una estrategia, y la combinación de las estrategias elegidas por los jugadores determina la ganancia de cada jugador. Vamos a ilustrar la representación en forma normal con un ejemplo clásico, *el del dilema de los presos*. Dos sospechosos son arrestados y acusados de un delito. La policía no tiene evidencia suficiente para condenar a los sospechosos, a menos que uno confiese. La policía encierra a los sospechosos en celdas separadas y les explica las consecuencias derivadas de las decisiones que formen. Si ninguno confiesa, ambos serán condenados por un delito menor y sentenciados a un mes de cárcel. Si ambos confiesan,

serán sentenciados a seis meses de cárcel. Finalmente, si uno confiesa y el otro no, el que confiesa será puesto en libertad inmediatamente y el otro será sentenciado a nueve meses en prisión, seis por el delito y tres más por obstrucción a la justicia.

El problema de los presos puede representarse mediante la siguiente matriz binaria. (Como matriz, una matriz binaria puede tener un número arbitrario de filas y columnas; binaria se refiere al hecho de que en un juego de dos jugadores hay dos números en cada casilla, las ganancias de los dos jugadores).

		Preso 2	
		Callarse	Confesar
Preso 1	Callarse	$-1,-1$	$-9,0$
	Confesar	$0,-9$	$-6,-6$

El dilema de los presos

En este juego, cada jugador cuenta con dos estrategias posibles: confesar y no confesar. Las ganancias de los dos jugadores cuando eligen un par concreto de estrategias aparecen en la casilla correspondiente de la matriz binaria. Por convención, la ganancia del llamado jugador-fila (aquí el preso 1) es la primera ganancia, seguida por la ganancia del jugador-columna (aquí el preso 2). Por eso, si por ejemplo el preso 1 elige callar y el preso 2 elige confesar, el preso 1 recibe una ganancia de –9 (que representa nueve meses en prisión) y el preso 2 recibe una ganancia de 0 (que representa la inmediata puesta en libertad).

Ahora abordamos el caso general. La *representación en forma normal* de un juego especifica: (1) los jugadores en el juego, (2) las estrategias de que dispone cada jugador y (3) la ganancia de cada jugador en cada combinación posible de estrategias. A menudo discutiremos juegos con un número n de jugadores, en los cuales los jugadores están numerados de 1 a n y un jugador arbitrario es denominado jugador i. Sea S_i el conjunto de estrategias con que cuenta el jugador i (llamado *espacio de estrategias de* i), y sea s_i un elemento arbitrario de este conjunto. (Ocasionalmente escribiremos $s_i \in S_i$ para indicar que la estrategia s_i es un elemento del conjunto S_i.) Sea $(s_1,\ldots,s_n)$ una combinación de estrategias, una para

cada jugador, y sea u_i la función de ganancias del jugador i: $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ es la ganancia del jugador i si los jugadores eligen las estrategias $(s_1, \ldots, s_n)$. Compilando toda esta información tenemos:

Definición. *La **representación en forma normal** de un juego con n jugadores especifica los espacios de estrategias de los jugadores $S_1, \ldots, S_n$ y sus funciones de ganancias $u_1, \ldots, u_n$. Denotamos este juego con $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$.*

Aunque hemos indicado que en un juego en forma normal los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea, esto no significa que las partes *actúen* necesariamente de forma simultánea. Es suficiente que cada parte elija la acción a seguir sin conocer las decisiones de los demás, como sería aquí el caso si los presos tomasen una decisión en momentos arbitrarios en sus celdas separadas. Además, aunque en este capítulo utilizamos juegos en forma normal para representar solamente juegos estáticos en los cuales los jugadores actúan todos sin conocer las decisiones de los demás jugadores, veremos en el capítulo 2 que las representaciones en forma normal pueden darse en juegos con tomas de decisión sucesivas, pero también que una alternativa, la representación *en forma extensiva* del juego, es a menudo un marco de trabajo más conveniente para analizar los aspectos dinámicos de los juegos.

1.1.B Eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas

Después de describir un modo de representar un juego, ahora vamos a esbozar una forma de resolver un problema de teoría de juegos. Empezamos con el dilema de los presos, porque es fácil de resolver utilizando únicamente la idea de que un jugador racional no utilizará una estrategia estrictamente dominada.

En el dilema de los presos, si un sospechoso va a confesar, sería mejor para el otro confesar y con ello ir a la cárcel seis meses, en lugar de callarse y pasar nueve meses en prisión. Del mismo modo, si un sospechoso va a callarse, para el otro sería mejor confesar y con ello ser puesto en libertad inmediatamente en lugar de callarse y permanecer en prisión durante un mes. Así, para el preso i, la estrategia de callarse está dominada por la de confesar: para cada estrategia que el preso j puede elegir, la ganancia del prisionero i es menor si se calla que si confiesa. (Lo mismo ocurriría en cualquier matriz binaria en la cual las ganancias 0, -1, -6 y -9 fueran reemplazadas por las ganancias T,R,P e I respectivamente,

siempre que $T > R > P > I$, para plasmar las ideas de ganancias de tentación, recompensa, penalización e ingenuidad. De forma más general:

Definición. *En el juego en forma normal* $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, *sean* s_i' *y* s_i'' *posibles estrategias del jugador* i *(por ejemplo,* s_i' *y* s_i'' *son elementos de* S_i*). La estrategia* s_i' *está* ***estrictamente dominada*** *por la estrategia* s_i'' *si para cada combinación posible de las estrategias de los restantes jugadores la ganancia de* i *por utilizar* s_i' *es estrictamente menor que la ganancia de* i *por utilizar* s_i''*:*

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'', s_{i+1}, \ldots, s_n) \qquad (DE)$$

para cada $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ *que puede ser construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores* $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_n$.

Los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, puesto que bajo ninguna conjetura que un jugador pudiera formarse sobre las estrategias que elegirán los demás jugadores sería óptimo utilizar tales estrategias.[1] Así, en el dilema de los presos, un jugador racional elegirá confesar, por lo que (confesar, confesar) será el resultado al que llegan dos jugadores racionales, incluso cuando (confesar, confesar) supone unas ganancias peores para ambos jugadores que (callar, callar). Como el dilema de los presos tiene múltiples aplicaciones (que incluyen la carrera de armamentos y el problema del polizón en la provisión de bienes públicos) trataremos variantes del juego en los capítulos 2 y 4. Por ahora nos centraremos más bien en si la idea de que jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas puede conducir a la solución de otros juegos.

Consideremos el juego abstracto de la figura 1.1.1.[2] El jugador 1 tiene dos estrategias y el jugador 2 tiene 3: $S_1 = \{\text{alta, baja}\}$ y $S_2 = \{\text{izquierda, centro, derecha}\}$. Para el jugador 1, ni alta ni baja están estrictamente

[1] Una cuestión complementaria también tiene interés: si no existe una conjetura que el jugador i pueda formarse sobre las estrategias de los demás jugadores, que haga óptimo elegir la estrategia s_i, ¿podemos concluir que debe existir otra estrategia que domine estrictamente a s_i? La respuesta es afirmativa, siempre que adoptemos definiciones adecuadas de "conjetura" y de "otra estrategia", términos que incluyen la idea de estrategias mixtas que introduciremos en la sección 1.3.A.

[2] La mayor parte de este libro considera aplicaciones económicas más que ejemplos abstractos, tanto porque las aplicaciones son de interés por sí mismas como porque, para muchos lectores, las aplicaciones son a menudo un modo útil de explicar la teoría subyacente. Sin embargo, cuando introduzcamos algunas ideas teóricas básicas, recurriremos a ejemplos abstractos sin una interpretación económica directa.

dominadas: alta es mejor que baja si 2 elige izquierda (porque 1 es mayor que 0), pero baja es mejor que alta si 2 elige derecha (porque 2 es mayor que cero).

		Jugador 2		
		Izquierda	Centro	Derecha
Jugador1	Alta	1,0	1,2	0,1
	Baja	0,3	0,1	2,0

Figura 1.1.1

Sin embargo, para el jugador 2, derecha está estrictamente dominada por centro (porque 2 es mayor que 1 y 1 es mayor que 0), por lo que un jugador racional 2 no elegirá derecha. Así, si el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, puede eliminar derecha del espacio de estrategias del jugador 2. Esto es, si el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, puede comportarse en el juego de la figura 1.1.1 como si estuviera en el juego de la figura 1.1.2.

		Jugador 2	
		Izquierda	Centro
Jugador 1	Alta	1,0	1,2
	Baja	0,3	0,1

Figura 1.1.2

En la figura 1.1.2, baja está ahora estrictamente dominada por alta para el jugador 1, así que si el jugador 1 es racional (y el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, por lo que se aplica el juego de la figura 1.1.2) no elegirá baja. Por eso, si el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional, *y* el jugador 2 sabe que el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional (por lo que el jugador 2 sabe que se aplica la figura 1.1.2), el jugador 2 puede eliminar baja del espacio de estrategias del jugador 1, quedando el juego como indica la figura 1.1.3. Pero ahora, izquierda está estrictamente dominada por centro para el jugador 2, quedando (alta, centro) como el resultado del juego.

		Jugador 2	
		Izquierda	Centro
Jugador 1	Alta	1,0	1,2

Figura 1.1.3

Este proceso se denomina *eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas*. Aunque está basado en la atractiva idea de que los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, el proceso presenta dos inconvenientes. En primer lugar, cada paso requiere un supuesto adicional sobre lo que los jugadores saben acerca de la racionalidad del otro. Si queremos ser capaces de aplicar el proceso para un número arbitrario de pasos, necesitamos suponer que es *información del dominio público* que los jugadores son racionales. Esto es, necesitamos suponer no sólo que todos los jugadores son racionales, sino también que todos los jugadores saben que todos los jugadores son racionales, y que todos los jugadores saben que todos los jugadores saben que todos los jugadores son racionales, y así *ad infinitum* (véase la definición formal de información del dominio público en Aumann [1976]).

La segunda desventaja de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas es que el proceso conduce a menudo a una predicción imprecisa sobre el desarrollo del juego. Por ejemplo, consideremos el juego de la figura 1.1.4. En este juego no hay estrategias estrictamente dominadas para ser eliminadas. (Puesto que no hemos fundamentado este juego en absoluto, al lector puede parecerle arbitrario o incluso patológico. Para una aplicación económica en el mismo sentido, véase el caso de tres o más empresas en el modelo de Cournot incluido en la sección 1.2.A.) Puesto que todas las estrategias en el juego sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, el proceso no permite ninguna predicción sobre el desarrollo del juego.

	I	C	D
A	0,4	4,0	5,3
M	4,0	0,4	5,3
B	3,5	3,5	6,6

Figura 1.1.4

A continuación abordamos el equilibrio de Nash, un concepto de solución que da lugar a predicciones mucho más precisas en una clase de juegos muy amplia. Demostramos que el equilibrio de Nash es un concepto de solución más poderoso que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, en el sentido de que las estrategias de los jugadores en un equilibrio de Nash siempre sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, cosa que no ocurre a la inversa. En los capítulos siguientes argumentaremos que, en juegos más ricos, incluso el equilibrio de Nash da lugar a predicciones demasiado imprecisas sobre el desarrollo del juego, por lo que definiremos nociones de equilibrio aún más poderosas, más adecuadas para estos casos.

1.1.C Fundamentación y definición del equilibrio de Nash

Una manera de fundamentar la definición del equilibrio de Nash es el argumento de que si la teoría de juegos ofrece una solución única a un determinado problema, esta solución debe ser un equilibrio de Nash en el siguiente sentido: Supongamos que la teoría de juegos hace una única predicción sobre las estrategias elegidas por los jugadores. Para que esta predicción sea correcta es necesario que cada jugador esté dispuesto a elegir la estrategia predicha por la teoría. Por ello, la estrategia predicha de cada jugador debe ser la mejor respuesta de cada jugador a las estrategias predichas de los otros jugadores. Tal predicción puede denominarse *estratégicamente estable* o *self-enforcing*, puesto que ningún jugador va a querer desviarse de la estrategia predicha para él. Llamaremos a tal predicción equilibrio de Nash:

Definición. *En el juego en forma normal de n jugadores, $G = \{S_1,\ldots,S_n; u_1, \ldots,u_n\}$, las estrategias $s_1^*,\ldots,s_n^*$) forman un* ***equilibrio de Nash*** *si, para cada jugador i, s_i^* es la mejor respuesta del jugador i (o al menos una de ellas) a las estrategias de los otros $n-1$ jugadores, $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$:*

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*) \geq u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*) \qquad \text{(EN)}$$

para cada posible estrategia s_i en S_i; esto es, s_i^* es una solución de

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*).$$

Para relacionar esta definición con su fundamentación anterior, supongamos que la teoría de juegos ofrece las estrategias $(s'_1,\ldots,s'_n)$ como la solución al juego en forma normal $G = \{S_1,\ldots,S_n; u_1,\ldots,u_n\}$. Decir que $(s'_1,\ldots,s'_n)$ no constituyen un equilibrio de Nash de G es equivalente a decir que existe algún jugador i tal que s'_i *no* es la mejor respuesta a $(s'_1,\ldots,s'_{i-1},s'_{i+1},\ldots,s'_n)$. Esto es, existe alguna s''_i en S_i tal que

$$u_i(s'_1,\ldots,s'_{i-1},s'_i,s'_{i+1},\ldots,s'_n) < u_i(s'_1,\ldots,s'_{i-1},s''_i,s'_{i+1},\ldots,s'_n).$$

Así, si la teoría ofrece las estrategias $(s'_1,\ldots,s'_n)$ como la solución pero estas estrategias no constituyen un equilibrio de Nash, al menos un jugador tendrá un incentivo para desviarse de la predicción de la teoría, con lo que la teoría quedará desmentida por el desarrollo concreto del juego. Otra fundamentación muy parecida del equilibrio de Nash incorpora la idea de convenio: si surge un acuerdo sobre cómo comportarse en un determinado juego, las estrategias fijadas por el convenio deben formar un equilibrio de Nash; si no, habrá al menos un jugador que no se regirá por el convenio.

Para concretar, vamos a resolver unos cuantos ejemplos. Consideremos los tres juegos en forma normal ya descritos: el dilema de los presos y los de las figuras 1.1.1. y 1.1.4. Una forma torpe de hallar los equilibrios de Nash en un juego consiste simplemente en comprobar si cada combinación posible de estrategias satisface la condición (EN) en la definición.[3] En un juego de dos jugadores, esta forma de hallar los equilibrios comienza del modo siguiente: para cada jugador y para cada estrategia posible con la que cuenta cada jugador se determina la mejor respuesta del otro jugador a esa estrategia. En la figura 1.1.5 se representa esto en el caso del juego definido en 1.1.4, subrayando la ganancia de la mejor respuesta del jugador j a cada una de las posibles estrategias del jugador i. Si el jugador columna fuera a jugar I, por ejemplo, la mejor respuesta del jugador fila sería M, puesto que 4 es mayor que 3 y que 0; por ello, la ganancia que 4 le proporciona al jugador fila en la casilla (M,I) de la matriz binaria está subrayada.

[3] En la sección 1.3.A vamos a distinguir entre estrategias puras y mixtas. Después vamos a ver que la definición dada aquí describe equilibrios de Nash en *estrategias puras*, pero que también puede haber equilibrios de Nash en *estrategias mixtas*. A menos que se señale explícitamente de otro modo, todas las referencias a los equilibrios de Nash en esta sección se refieren a equilibrios de Nash en estrategias puras.

Un par de estrategias satisface la condición (EN) si la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a la del otro, es decir, si ambas ganancias están subrayadas en la casilla correspondiente de la matriz binaria. Por ello (B,D) es el único par de estrategias que satisface (EN). Lo mismo ocurre para (confesar, confesar) en el dilema de los presos y para (alta, centro) en la figura 1.1.1. Estos pares de estrategias son los únicos equilibrios de Nash de estos juegos.[4]

	I	C	D
A	0,<u>4</u>	<u>4</u> ,0	5,3
M	<u>4</u>,0	0,<u>4</u>	5,3
B	3,5	3,5	<u>6</u>,<u>6</u>

Figura 1.1.5

A continuación tratamos la relación entre el equilibrio de Nash y la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas. Recordemos que las estrategias de equilibrio de Nash en el dilema de los presos y en la figura 1.1.1 —(confesar, confesar) y (alta, centro) respectivamente— son las únicas estrategias que sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas. Este resultado puede generalizarse: si la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas elimina todas las estrategias menos las estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$, estas estrategias constituyen el único equilibrio de Nash del juego. (Véase el apéndice para una demostración de esta afirmación.) Sin embargo, puesto que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas con frecuencia *no* elimina más que una combinación de estrategias, es del máximo interés el hecho de que el equilibrio de Nash sea un concepto de solución más poderoso que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas en el siguiente sentido: si las estrategias $s_1^*, \ldots, s_n^*$ constituyen un equilibrio de Nash, sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas (véase apéndice para una demostración), pero pueden existir estrategias que sobrevivan a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas pero que no formen parte de ningún

[4] Esta afirmación es correcta incluso si no limitamos nuestra atención al equilibrio de Nash en estrategias puras, puesto que en estos juegos no existen equilibrios de Nash en estrategias mixtas. Véase el ejercicio 1.10.

equilibrio de Nash. Para ver esto último recordemos que en la figura 1.1.4, el equilibrio de Nash ofrece una única predicción (B,D), mientras que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas ofrece una predicción con el mayor grado de imprecisión posible: no se elimina ninguna estrategia; puede ocurrir cualquier cosa.

Tras demostrar que el equilibrio de Nash es un concepto de solución más poderoso que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas tenemos que preguntarnos si el equilibrio de Nash no es un concepto de solución demasiado poderoso. Esto es ¿podemos estar seguros de que el equilibrio de Nash existe? Nash (1950) demostró que en cualquier juego finito (por ejemplo, un juego en el cual el número n de jugadores y los conjuntos de estrategias $S_1,\ldots,S_n$ son todos finitos) existe al menos un equilibrio de Nash. (Este equilibrio puede incluir estrategias mixtas, que discutiremos en la sección 1.3.A. Para un enunciado preciso del teorema de Nash véase la sección 1.3.B.) Cournot (1838) propuso la misma noción de equilibrio en el contexto de un modelo particular de duopolio y demostró (por construcción) que existe un equilibrio en este modelo; véase la sección 1.2.A. En cada aplicación analizada en este libro, seguiremos el ejemplo de Cournot: demostraremos que existe un equilibrio de Nash (o más poderoso) mediante la construcción de uno. En algunas secciones teóricas, no obstante, utilizaremos el teorema de Nash (o su análogo para conceptos de equilibrio más poderosos) y simplemente diremos que existe un equilibrio.

Concluimos esta sección con otro ejemplo clásico, *la batalla de los sexos*. Este ejemplo muestra que un juego puede tener múltiples equilibrios de Nash, y también será útil en las discusiones sobre estrategias mixtas de las secciones 1.3.B y 3.2.A. En la exposición tradicional del juego (que, quede claro, data de los años cincuenta), un hombre y una mujer están tratando de decidir qué harán esta noche; nosotros analizamos una versión del juego que no tiene en cuenta el sexo de los participantes.[5] En lugares de trabajo separados, Pat y Chris deben elegir entre ir a la ópera o a un combate de boxeo. Ambos(as) jugadores(as) preferirían pasar la noche juntos(as), pero Pat preferiría estar juntos(as) en el boxeo, mientras que Chris preferiría estar juntos(as) en la ópera, tal como representamos en la matriz binaria que sigue:

[5] En inglés, los diminutivos Pat y Chris pueden referirse tanto a nombres masculinos (Patrick y Christopher) como femeninos (Patricia y Christina). (N. de los T.)

		Pat: Ópera	Pat: Boxeo
Chris	Ópera	2,1	0,0
	Boxeo	0,0	1,2

La batalla de los sexos

Ambos, (ópera, ópera) y (boxeo, boxeo) son equilibrios de Nash.

Hemos argumentado antes que si la teoría de juegos ofrece una única solución a un juego, ésta debe ser un equilibrio de Nash. Este argumento ignora la posibilidad de juegos en los cuales la teoría de juegos no ofrece una solución única. También hemos argumentado que si se llega a un acuerdo sobre cómo comportarse en un juego, las estrategias establecidos en el acuerdo deben ser un equilibrio de Nash, pero este argumento, al igual que el anterior, ignora la posibilidad de juegos para los cuales no se alcance un acuerdo. En algunos juegos con múltiples equilibrios de Nash sobresale un equilibrio como la solución más atractiva del juego. (Gran parte de la teoría de los capítulos posteriores constituye un esfuerzo para identificar este equilibrio más atractivo en diferentes clases de juegos.) Así, la existencia de múltiples equilibrios de Nash no es un problema en sí mismo. Sin embargo, en la batalla de los sexos, (ópera, ópera) y (boxeo, boxeo) parecen igualmente atractivos, lo que indica que pueden existir juegos para los cuales la teoría de juegos no ofrece una solución única y en los que no se llegará a ningún acuerdo.[6] En tales juegos, el equilibrio de Nash pierde gran parte de su atractivo como predicción del juego.

[6] En la sección 1.3.B describimos un tercer equilibrio de Nash (que incluye estrategias mixtas) en la batalla de los sexos. Al contrario que (ópera,ópera) y (boxeo,boxeo), este tercer equilibrio ofrece ganancias simétricas, como se podría esperar de la solución única a un juego simétrico. Por otro lado, el tercer equilibrio es también ineficiente, lo cual puede influir en contra de que se llegue a un acuerdo para alcanzarlo. Cualquiera que sea nuestro juicio sobre los equilibrios de Nash en la batalla de los sexos, la cuestión sigue en pie: pueden existir juegos para los cuales la teoría de juegos no ofrezca una solución única y para los que no se llegue a ningún acuerdo.

Apéndice

Este apéndice contiene demostraciones de las dos proposiciones siguientes, que fueron enunciadas de manera informal en la sección 1.1.C. Saltarse estas demostraciones no impedirá de forma sustancial la comprensión del resto del libro. Sin embargo, para aquellos lectores no acostumbrados a la manipulación de definiciones formales y a la construcción de demostraciones, el dominio de estas demostraciones constituye un valioso ejercicio.

Proposición A. *En el juego en forma normal con n jugadores $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, si la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas elimina todas las estrategias menos las $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$, estas últimas estrategias constituyen el único equilibrio de Nash del juego.*

Proposición B. *En el juego en forma normal con n jugadores $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, si las estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ forman un equilibrio de Nash, entonces sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas.*

Puesto que la proposición B es más fácil de demostrar, comenzamos por ella para entrar en materia. El argumento es por contradicción. Esto es, vamos a suponer que una de las estrategias en un equilibrio de Nash es eliminada por eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, y después demostraremos que llegaríamos a una contradicción si este supuesto ocurriera, demostrando así que el supuesto debe ser falso.

Supongamos que las estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ forman un equilibrio de Nash del juego en forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, pero supongamos también que (tal vez después de que algunas estrategias distintas de $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ hayan sido eliminadas) s_i^* es la primera de las estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ en ser eliminada por ser estrictamente dominada. Entonces, debe existir una estrategia s_i'' que no ha sido aún eliminada de S_i que domina estrictamente a s_i^*. Adaptando (DE) tenemos

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n) \qquad (1.1.1)$$

para cada $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ que puede ser construida a partir de las estrategias que no han sido aún eliminadas de los espacios de estrategias de los otros jugadores. Puesto que s_i^* es la primera de las estrategias de

equilibrio en ser eliminada, las estrategias de equilibrio de otros jugadores no han sido eliminadas, por lo que una de las consecuencias de (1.1.1) es

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*) < u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i'',s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*). \qquad (1.1.2)$$

Pero (1.1.2) es contradicha por (EN): s_i^* debe ser una mejor respuesta a $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$, por lo que no puede existir una estrategia s_i'' que domine estrictamente a s_i^*. Esta contradicción completa la demostración.

Después de haber demostrado la proposición B hemos ya demostrado parte de la proposición A; lo único que nos queda demostrar es que si la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas elimina todas las estrategias excepto $(s_1^*,\ldots,s_n^*)$, estas estrategias forman un equilibrio de Nash. Por la proposición B cualesquiera otros equilibrios de Nash habrían sobrevivido también, por lo que este equilibrio debe ser único. Suponemos aquí que G es finito.

El argumento es nuevamente por contradicción. Supongamos que la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas elimina todas las estrategias excepto $(s_1^*,\ldots,s_n^*)$, pero estas estrategias no forman un equilibrio de Nash. Entonces debe existir un jugador i y alguna estrategia factible s_i en S_i tal que (EN) no se cumpla, pero s_i debe haber sido estrictamente dominada por alguna otra estrategia s_i' en algún punto del proceso. Los enunciados formales de estas dos observaciones son: existe s_i en S_i tal que

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*) < u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*); \qquad (1.1.3)$$

y existe s_i' en el conjunto de estrategias del jugador i que queda en algún punto del proceso tal que

$$u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_n) < u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i',s_{i+1},\ldots,s_n) \qquad (1.1.4)$$

para cada $(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$ que puede ser construida a partir de las estrategias que quedan en los espacios de estrategias de los otros jugadores en ese punto del proceso. Puesto que las estrategias de los otros jugadores $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$ nunca son eliminadas, una de las implicaciones de (1.1.4) es

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*) < u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i',s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*). \qquad (1.1.5)$$

Si $s_i' = s_i^*$ (es decir, si s_i^* es la estrategia que domina estrictamente a s_i) (1.1.5) contradice a (1.1.3), en cuyo caso la demostración está completa. Si $s_i' \neq s_i^*$ alguna otra estrategia s_i'' debe más tarde dominar estrictamente a s_i', ya que s_i' no sobrevive al proceso. Por eso, las desigualdades análogas a (1.1.4) y (1.1.5) se cumplen para s_i' y s_i'', que sustituyen a s_i y s_i' respectivamente. Una vez más, si $s_i'' = s_i^*$ la demostración está completa; si no, pueden construirse otras dos desigualdades análogas. Puesto que s_i^* es la única estrategia de S_i que sobrevive al proceso, la repetición de este argumento (en un juego finito) completa finalmente la demostración.

1.2 Aplicaciones

1.2.A Modelo de duopolio de Cournot

Como hemos indicado en la sección previa, Cournot (1838) se anticipó a la definición de equilibrio de Nash en más de un siglo (pero sólo en el contexto de un modelo concreto de duopolio). Por ello, no es sorprendente que el trabajo de Cournot constituya uno de los clásicos de la teoría de juegos y una de las piedras angulares en organización industrial. Consideramos aquí una versión muy simple del modelo de Cournot y presentaremos variaciones del modelo en los capítulos siguientes. En esta sección utilizamos el modelo para ilustrar: (a) la traducción del enunciado informal de un problema a la forma normal de un juego; (b) los cálculos necesarios para hallar el equilibrio de Nash del juego y (c) la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas.

Sean q_1 y q_2 las cantidades (de un producto homogéneo) producidas por las empresas 1 y 2 respectivamente. Sea $P(Q) = a - Q$ el precio de equilibrio de mercado cuando la cantidad agregada en el mercado es $Q = q_1 + q_2$. (Más precisamente, $P(Q) = a - Q$ para $Q < a$ y $P(Q) = 0$ para $Q \geq a$.) Supongamos que el coste total de producción de la cantidad q_i por la empresa i es $C_i(q_i) = cq_i$. Es decir, no existen costes fijos y el coste marginal es constante e igual a c, donde suponemos que $c < a$. Siguiendo a Cournot, suponemos que las empresas eligen sus cantidades de forma simultánea.[7]

[7] En la sección 1.2.B discutimos el modelo de Bertrand (1883), en el cual las empresas eligen precios en vez de cantidades, y en la sección 2.1.B el modelo de Stackelberg (1934), en el cual las empresas eligen cantidades, pero una empresa elige antes que (y es observada por) la otra. Finalmente, discutimos en la sección 2.3.C el modelo de Friedman (1971), en el cual la interacción descrita en el modelo de Cournot ocurre repetidamente en el tiempo.

Para encontrar el equilibrio de Nash en el juego de Cournot, primero traducimos el problema a un juego en forma normal. Recordemos de la sección anterior que la representación en forma normal de un juego exige precisar: (1) los jugadores en el juego; (2) las estrategias de que dispone cada jugador y (3) las ganancias recibidas por cada jugador con cada combinación de estrategias posibles. Hay dos jugadores en un juego de duopolio: las dos empresas. En el modelo de Cournot las estrategias de que dispone cada empresa son las diferentes cantidades que puede producir. Vamos a suponer que el producto es continuamente divisible. Naturalmente, no puede haber producción negativa. Por ello, el espacio de estrategias de cada empresa puede ser representado como $S_i = [0,\infty)$, los números reales no negativos, en cuyo caso una estrategia típica s_i es la elección de una cantidad $q_i \geq 0$. Se podría argumentar que no se puede disponer de cantidades demasiado grandes, por lo que éstas no deberían incluirse en el espacio de estrategias de una empresa. No obstante, puesto que $P(Q) = 0$ para $Q \geq a$, ninguna empresa producirá una cantidad $q_i > a$.

Quedan por concretar las ganancias de la empresa i en función de las estrategias elegidas por dicha empresa y por la otra empresa, y definir y hallar el equilibrio. Suponemos que las ganancias de la empresa son simplemente su beneficio. Por ello, la ganancia $u_i(s_i,s_j)$ en un juego general en forma normal de dos jugadores puede expresarse de la siguiente forma:[8]

$$\pi_i(q_i,q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c].$$

Recordemos de la sección previa que, en un juego en forma normal de dos jugadores, el par de estrategias (s_1^*,s_2^*) forma un equilibrio de Nash si, para cada jugador i,

$$u_i(s_i^*,s_j^*) \geq u_i(s_i,s_j^*) \qquad \text{(EN)}$$

para cada posible estrategia s_i en S_i. De la misma forma, para cada jugador i, s_i^* debe ser una solución del problema de optimización

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i,s_j).$$

[8] Obsérvese que hemos cambiado ligeramente la notación al escribir $u_i(s_i,s_j)$ en vez de $u_i(s_1,s_2)$. Ambas expresiones representan las ganancias del jugador i en función de las estrategias elegidas por todos los jugadores. Vamos a utilizar estas expresiones (y sus análogas con n jugadores) indistintamente.

En el modelo de duopolio de Cournot, el enunciado análogo es que el par de cantidades (q_1^*,q_2^*) forma un equilibrio de Nash si, para cada empresa i, q_i^* es una solución de

$$\max_{0\leq q_i<\infty} \pi_i(q_i,q_j) = \max_{0\leq q_i<\infty} q_i[a-(q_i+q_j^*)-c].$$

Suponiendo que $q_j^* < a-c$ (como demostraremos que ocurre), la condición de primer orden del problema de optimización de la empresa i es necesaria y suficiente, con lo que se obtiene

$$q_i = \frac{1}{2}(a-q_j^*-c). \tag{1.2.1}$$

Así, si el par de cantidades (q_1^*,q_2^*) ha de formar un equilibrio de Nash, las cantidades elegidas por las empresas deben cumplir

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a-q_2^*-c)$$

y

$$q_2^* = \frac{1}{2}(a-q_1^*-c).$$

Resolviendo este par de ecuaciones obtenemos

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3},$$

que es ciertamente menor que $a-c$, como habíamos supuesto.

La interpretación de este equilibrio es simple. Cada empresa querría por supuesto tener el monopolio del mercado, en cuyo caso elegiría q_i para maximizar $\pi_i(q_i,0)$, produciría la cantidad de monopolio $q_m = (a-c)/2$ y alcanzaría un beneficio de monopolio $\pi_i(q_m,0) = (a-c)^2/4$. Dado que hay dos empresas, los beneficios agregados del duopolio se verían maximizados fijando una cantidad agregada q_1+q_2 igual a la cantidad de monopolio q_m, como ocurriría si $q_i = q_m/2$ para cada i, por ejemplo. El problema de este arreglo es que cada empresa tiene un incentivo para desviarse de él, puesto que la cantidad de monopolio es baja, el precio correspondiente $P(q_m)$ es alto y, a este precio, cada empresa querría aumentar su cantidad, pese a que tal incremento en la producción bajaría el precio de equilibrio de mercado. (Formalmente, utilícese (1.2.1) para comprobar que $q_m/2$ *no* es la mejor respuesta de la empresa 2 a la elección de $q_m/2$ por parte de la empresa 1.) En el equilibrio de Cournot, al contrario, la cantidad agregada es más alta, por lo que el precio correspondiente es más bajo, con lo que la

tentación de aumentar la producción queda reducida justo lo preciso para que cada empresa decida no hacerlo, al darse cuenta de que con ello caerá el precio de equilibrio de mercado. Véase el ejercicio 1.4 para un análisis de cómo la presencia de un número n de oligopolistas afecta al dilema planteado en equilibrio por la tentación de aumentar la producción y el temor a reducir el precio de equilibrio de mercado.

En vez de hallar de forma algebraica el equilibrio de Nash del juego de Cournot, se podría hallar gráficamente del modo siguiente: la ecuación (1.2.1) proporciona la mejor respuesta de la empresa i a la estrategia de *equilibrio* de la empresa j, q_j^*. Un razonamiento análogo conduce a la mejor respuesta de la empresa 2 a cualquier estrategia *arbitraria* de la empresa 1, y la mejor respuesta de la empresa 1 a cualquier estrategia arbitraria de la empresa 2. Suponiendo que la estrategia de la empresa 1 cumple $q_1 < a - c$, la mejor respuesta de la empresa 2 es

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(a - q_1 - c);$$

del mismo modo, si q_2 es menor que $a - c$, la mejor respuesta de la empresa 1 es

$$R_1(q_2) = \frac{1}{2}(a - q_2 - c).$$

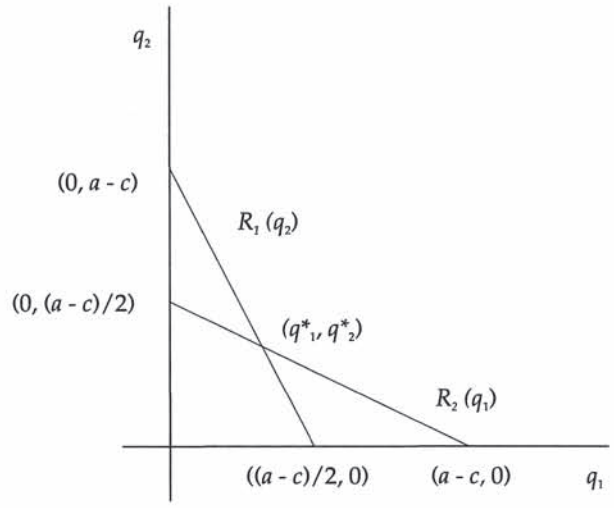

Figura 1.2.1

Como se muestra en la figura 1.2.1 estas dos funciones de mejor respuesta se cortan sólo una vez, en el par de cantidades de equilibrio (q_1^*,q_2^*).

Un tercer modo de hallar este equilibrio de Nash es aplicar el proceso de eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas. Este proceso ofrece una única solución que, por la proposición A del apéndice de la sección anterior, debe ser un equilibrio de Nash (q_1^*,q_2^*). El proceso completo requiere un número infinito de pasos, cada uno de los cuales elimina una fracción de las cantidades que quedan en el espacio de estrategias de cada empresa. Vamos a discutir solamente los dos primeros pasos. En primer lugar, la cantidad de monopolio $q_m = (a - c)/2$ domina estrictamente a cualquier cantidad más alta. Es decir, para cada $x > 0$, $\pi_i(q_m,q_j) > \pi_i(q_m + x,q_j)$ para toda $q_j \geq 0$. Para comprobarlo, nótese que $Q = q_m + x + q_j < a$, por lo que

$$\pi_i(q_m,q_j) = \frac{a-c}{2}\left[\frac{a-c}{2} - q_j\right]$$

y

$$\pi_i(q_m + x,q_j) = \left[\frac{a-c}{2} + x\right]\left[\frac{a-c}{2} - x - q_j\right] = \pi_i(q_m,q_j) - x(x + q_j),$$

y si $Q = q_m + x + q_j \geq a$, entonces $P(Q) = 0$, por lo que producir una cantidad menor aumenta el beneficio. En segundo lugar, puesto que las cantidades mayores que q_m han sido eliminadas, la cantidad $(a - c)/4$ domina estrictamente a cualquier cantidad más baja. Esto es, para cualquier x entre cero y $(a-c)/4$, $\pi_i[(a-c)/4,q_j] > \pi_i[(a-c)/4-x,q_j]$ para cualquier q_j entre cero y $(a - c)/2$. Para comprobarlo, nótese que

$$\pi_i\left(\frac{a-c}{4},q_j\right) = \frac{a-c}{4}\left[\frac{3(a-c)}{4} - q_j\right]$$

y

$$\begin{aligned}\pi_i\left(\frac{a-c}{4} - x,q_j\right) &= \left[\frac{a-c}{4} - x\right]\left[\frac{3(a-c)}{4} + x - q_j\right] \\ &= \pi_i(q_m,q_j) - x\left[\frac{a-c}{2} + x - q_j\right].\end{aligned}$$

Tras estos dos pasos, las cantidades que quedan en el espacio de estrategias de cada empresa son las contenidas en el intervalo entre $(a-c)/4$ y $(a-c)/2$. La repetición de estos argumentos conduce a intervalos cada vez menores

de las cantidades que quedan. En el límite, estos intervalos convergen al único punto $q_i^* = (a - c)/3$.

La eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas también se puede representar en forma gráfica utilizando la observación (incluida en la nota 1; véase también la discusión en la sección 1.3.A) de que una estrategia es estrictamente dominada si y sólo si no existe ninguna conjetura sobre las decisiones posibles de los demás jugadores para la cual sea la mejor respuesta. Puesto que sólo hay dos empresas en este modelo, podemos reformular esta observación del siguiente modo: una cantidad q_i es estrictamente dominada si y sólo si no hay ninguna conjetura sobre q_j tal que q_i sea la mejor respuesta de la empresa i. Nuevamente, discutimos sólo los dos primeros pasos del proceso iterativo. En primer lugar, nunca es una respuesta mejor para la empresa i producir más que la cantidad de monopolio $q_m = (a - c)/2$. Para comprobarlo, consideremos, por ejemplo, la función de mejor respuesta de la empresa 2: en la figura 1.2.1, $R_2(q_1)$ es igual a q_m cuando $q_1 = 0$, y disminuye cuando q_1 aumenta. Así, para cualquier $q_j \geq 0$, si la empresa i cree que la empresa j elegirá q_j, la mejor respuesta de la empresa i es menor que o igual a q_m. No existe q_j tal que la mejor respuesta de la empresa i sea mayor que q_m. En segundo lugar, dada esta cota superior para la cantidad de la empresa j, podemos derivar una cota más baja a la mejor respuesta de la empresa i: si $q_j \leq (a - c)/2$, entonces $R_i(q_j) \geq (a - c)/4$, como mostramos para la mejor respuesta de la empresa 2 en la figura 1.2.2.[9]

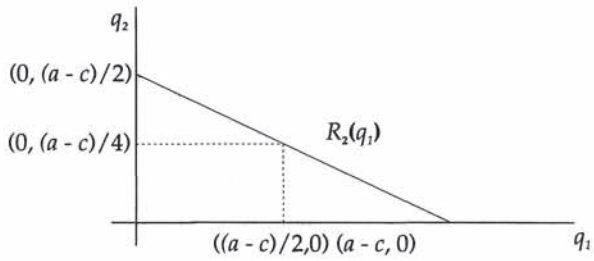

Figura 1.2.2

[9] Estos dos argumentos son ligeramente incompletos, puesto que no hemos analizado la mejor respuesta de la empresa i cuando no tiene la certeza de cuál sea la cantidad q_j. Supongamos que la empresa i no está segura de q_j pero cree que el valor esperado de q_j es $E(q_j)$. Puesto que $\pi_i(q_i,q_j)$ es lineal en q_j, la mejor respuesta de la empresa i dentro de su incertidumbre es igual a su mejor respuesta cuando tiene la certeza de que la empresa j elegirá $E(q_j)$, caso que hemos desarrollado en el texto.

Como en el caso anterior, la repetición de estos argumentos conduce a la cantidad $q_i^* = (a - c)/3$.

Concluimos esta sección cambiando el modelo de Cournot, de forma que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas *no* ofrezca una solución única. Para hacerlo, añadimos simplemente una o más empresas al duopolio existente. Vamos a comprobar que el primero de los dos pasos discutidos en el caso del duopolio continúa cumpliéndose, pero el proceso termina ahí. Por eso, cuando hay más de dos empresas, la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas ofrece sólo la predicción imprecisa de que la cantidad de cada empresa no excederá a la cantidad de monopolio (como en la figura 1.1.4, donde no se eliminaba ninguna estrategia durante el proceso).

Para ser más concretos, consideramos el caso de tres empresas. Sea Q_{-i} la suma de las cantidades elegidas por las empresas distintas de i, y sea $\pi_i(q_i,Q_{-i}) = q_i(a - q_i - Q_{-i} - c)$ siempre que $q_i + Q_{-i} < a$ (mientras que $\pi_i(q_i,Q_{-i}) = -cq_i$ si $q_i + Q_{-i} \geq a$). Nuevamente es cierto que la cantidad de monopolio $q_m = (a - c)/2$ domina estrictamente cualquier cantidad más alta. Es decir, para cualquier $x > 0$, $\pi_i(q_m,Q_{-i}) > \pi_i(q_m + x,Q_{-i})$ para todo $Q_{-i} \geq 0$, como en el primer paso del caso de duopolio. Sin embargo, puesto que hay dos empresas además de la empresa i, lo único que podemos decir acerca de Q_{-i} es que está entre cero y $(a - c)$, porque q_j y q_k están entre cero y $(a - c)/2$. Pero esto implica que ninguna cantidad $q_i \geq 0$ es estrictamente dominada en el caso de la empresa i, porque para cada q_i entre cero y $(a - c)/2$ existe un valor de Q_{-i} entre cero y $(a - c)$ (concretamente, $Q_{-i} = a - c - 2q_i$), tal que q_i es la mejor respuesta de la empresa i a Q_{-i}. Por ello, en lo sucesivo ya no se puede eliminar ninguna estrategia.

1.2.B Modelo de duopolio de Bertrand

A continuación consideramos un modelo diferente de la relación que puede existir entre dos duopolistas, basado en la sugerencia de Bertrand (1883) de que, de hecho, las empresas eligen precios, y no cantidades como en el modelo de Cournot. Es importante observar que el modelo de Bertrand constituye un *juego diferente* al modelo de Cournot: los espacios de estrategias son diferentes, las funciones de ganancias son diferentes y (como se verá) el comportamiento de los equilibrios de Nash en los dos modelos es diferente. Algunos autores resumen estas diferencias hablando de los equilibrios de Cournot y de Bertrand. Pero esto puede crear

confusiones, puesto que existen diferencias entre los juegos de Bertrand y Cournot y en el comportamiento de equilibrio en estos juegos, pero *no* existe diferencia en el concepto de equilibrio utilizado en ambos juegos. *En ambos el concepto de equilibrio utilizado es el equilibrio de Nash definido en la sección anterior.*

Consideremos el caso de productos diferenciados. (Para el caso de productos homogéneos véase el ejercicio 1.7.) Si las empresas 1 y 2 eligen los precios p_1 y p_2 respectivamente, la cantidad demandada a la empresa i por los consumidores es

$$q_i(p_i,p_j) = a - p_i + bp_j,$$

donde $b > 0$ refleja hasta qué punto el producto de la empresa i es un sustituto del producto de la empresa j. (Ésta es una función de demanda irreal, puesto que la cantidad demandada del producto de la empresa i es positiva incluso cuando la empresa i fija un precio arbitrariamente alto, siempre que la empresa j también fije un precio suficientemente alto. Como se verá, el problema sólo tiene sentido si $b < 2$.) Como en la discusión del modelo de Cournot, suponemos que no existen costes fijos de producción y que los costes marginales son constantes e iguales a c, donde $c < a$ y las empresas deciden (por ejemplo, eligen los precios) simultáneamente.

Como antes, la primera tarea en el proceso de hallar el equilibrio de Nash es traducir el problema a un juego en forma normal. Tenemos dos jugadores nuevamente. Sin embargo, esta vez las estrategias de que dispone cada empresa son los diferentes precios que pueden fijar, en vez de las diferentes cantidades que pueden producir. Vamos a suponer que los precios negativos no son factibles, pero que cualquier precio no negativo lo es; por ejemplo, no existe ninguna restricción a los precios expresados en céntimos. Así, el espacio de estrategias de cada empresa puede ser nuevamente representado como $S_i = [0,\infty)$, los números reales no negativos, y una estrategia típica s_i es ahora la decisión de un precio $p_i \geq 0$.

Vamos a suponer nuevamente que la función de ganancias de cada empresa es simplemente su beneficio. El beneficio de la empresa i cuando elige el precio p_i y su rival elige el precio p_j es

$$\pi_i(p_i,p_j) = q_i(p_i,p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c].$$

Así, el par de precios (p_1^*,p_2^*) constituye un equilibrio de Nash si para cada

empresa i, p_i^* es una solución de

$$\max_{0 \leq p_i < \infty} \pi_i(p_i, p_j^*) = \max_{0 \leq p_i < \infty} [a - p_i + bp_j^*][p_i - c].$$

La solución al problema de optimización de i es

$$p_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c).$$

Por lo tanto, si el par de precios (p_1^*, p_2^*) ha de ser un equilibrio de Nash, las decisiones de precios de las empresas deben cumplir

$$p_1^* = \frac{1}{2}(a + bp_2^* + c)$$

y

$$p_2^* = \frac{1}{2}(a + bp_1^* + c).$$

Resolviendo este par de ecuaciones obtenemos

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}.$$

1.2.C Arbitraje de oferta final

A ciertos trabajadores del sector público no les está permitido declararse en huelga; en su lugar, las disputas salariales se resuelven mediante una decisión arbitral vinculante. (La liga de fútbol es un ejemplo más llamativo que el del sector público, pero es sustancialmente menos importante desde un punto de vista económico.) Otras muchas disputas, entre las que se encuentran los casos de negligencia médica y las denuncias de los inversores contra sus agentes de bolsa, también suelen resolverse por decisión arbitral. Las dos formas principales de arbitraje son el arbitraje *convencional* y el de *oferta final*. En el arbitraje de oferta final las dos partes hacen ofertas salariales y el árbitro decide entre una de las ofertas. Por el contrario, en un arbitraje convencional el árbitro tiene libertad para imponer cualquier salario. A continuación, vamos a derivar las ofertas salariales de equilibro de Nash, en un modelo de arbitraje de oferta final desarrollado por Farber (1980).[10]

[10] Esta aplicación incluye algunos conceptos básicos de probabilidad: función de distribución de probabilidad, función de densidad de probabilidad y valor esperado. Daremos definiciones sucintas cuando sean necesarias; para más detalles, consúltese cualquier texto de introducción a la probabilidad.

Supongamos que las partes en disputa son una empresa y un sindicato, y que la disputa es acerca de los salarios. Supongamos que el juego se desarrolla de la siguiente manera: primero, la empresa y el sindicato realizan simultáneamente ofertas, denominadas w_e y w_s. En segundo lugar, el árbitro elige una de las dos ofertas. (Como en muchos de los llamados juegos estáticos, esto es en realidad un juego dinámico del tipo que discutiremos en el capítulo 2, pero aquí lo reducimos a un juego estático entre la empresa y el sindicato al suponer una determinada conducta del árbitro en la segunda etapa.) Supongamos que el árbitro tiene un acuerdo ideal que le gustaría imponer, que denominamos x. Supongamos además que, tras observar las ofertas de las partes, w_e y w_s, el árbitro elige simplemente la oferta más cercana a x: siempre que $w_e < w_s$ (una intuición que demostraremos que se cumple) el árbitro elige w_e si $x < (w_e + w_s)/2$ y elige w_s si $x > (w_e + w_s)/2$, como vemos en la figura 1.2.3. (Lo que ocurre si $x = (w_e + w_s)/2$ es irrelevante; supongamos que el árbitro lanza una moneda.)

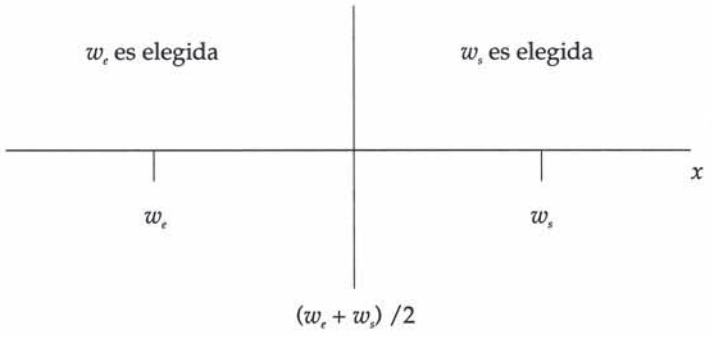

Figura 1.2.3

El valor de x es conocido por el árbitro, pero no por las partes. Las partes creen que x se distribuye aleatoriamente según una distribución de probabilidad $F(x)$, con la correspondiente función de densidad $f(x)$.[11] Dada nuestra especificación acerca del comportamiento del árbitro, si las ofertas son w_e y w_s, las partes creen que las probabilidades Prob$\{w_e$ sea elegida$\}$ y Prob$\{w_s$ sea elegida$\}$ pueden ser expresadas de la siguiente forma:

[11] Esto es, la probabilidad de que x sea menor que un valor arbitrario x^* es $F(x^*)$, y la derivada de esta probabilidad con respecto a x^* es $f(x^*)$. Puesto que $F(x^*)$ es una probabilidad, tenemos que $0 \leq F(x^*) \leq 1$ para cualquier x^*. Además, si $x^{**} > x^*$, $F(x^{**}) \geq F(x^*)$; entonces $f(x^*) \geq 0$ para cada x^*.

$$\text{Prob}\{w_e\text{elegido}\} = \text{Prob}\left\{x < \frac{w_e + w_s}{2}\right\} = F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right)$$

y

$$\text{Prob}\{w_e\text{elegido}\} = 1 - F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right).$$

Así, el acuerdo salarial esperado es

$$w_e \cdot \text{Prob}\{w_e\text{elegido}\} + w_s \cdot \text{Prob}\{w_s\text{elegido}\} = w_e \cdot F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right) + w_s \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_e + w_s}{2}\right)\right].$$

Suponemos que la empresa quiere minimizar el salario esperado impuesto por el árbitro y el sindicato quiere maximizarlo.

Si el par de ofertas (w_e^*, w_s^*) ha de constituir un equilibrio de Nash del juego entre la empresa y el sindicato, w_e^* debe ser una solución de[12]

$$\min_{w_e} w_e \cdot F\left(\frac{w_e + w_s^*}{2}\right) + w_s^* \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_e + w_s^*}{2}\right)\right]$$

y w_s^* debe ser una solución de

$$\max_{w_s} w_e^* \cdot F\left(\frac{w_e^* + w_s}{2}\right) + w_s \cdot \left[1 - F\left(\frac{w_e^* + w_s}{2}\right)\right].$$

Así, el par de ofertas salariales (w_e^*, w_s^*) debe ser una solución de las condiciones de primer orden de estos problemas de optimización:

$$(w_s^* - w_e^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right)$$

y

$$(w_s^* - w_e^*) \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = \left[1 - F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right)\right].$$

(Posponemos la consideración de si estas condiciones de primer orden son suficientes.) Puesto que los términos de la izquierda de estas condiciones de primer orden son iguales, los términos de la derecha deben asimismo ser iguales, lo que implica que

[12] Al formular los problemas de optimización de la empresa y el sindicato hemos supuesto que la oferta de la empresa es menor que la oferta del sindicato. Es inmediato demostrar que esta desigualdad se debe cumplir en equilibrio.

$$F\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right) = \frac{1}{2}; \tag{1.2.2}$$

esto es, la oferta media debe ser igual a la mediana del acuerdo preferido por el árbitro. Sustituyendo (1.2.2) en cualquiera de las condiciones de primer orden obtenemos

$$w_s^* - w_e^* = \frac{1}{f\left(\frac{w_e^* + w_s^*}{2}\right)}; \tag{1.2.3}$$

esto es, la distancia entre las ofertas debe ser igual a la inversa del valor de la función de densidad evaluada en la mediana del acuerdo preferido por el árbitro.

Consideremos el siguiente ejemplo, que ofrece un resultado de estática comparativa que resulta intuitivamente atractivo. Supongamos que el acuerdo preferido por el árbitro se distribuye normalmente con media m y varianza σ^2, en cuyo caso la función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right\}.$$

(En este ejemplo, se puede demostrar que las condiciones de primer orden anteriormente dadas son suficientes.) Puesto que una distribución normal es simétrica con respecto a su media, la mediana de la distribución es igual a su media, m. Por lo tanto, (1.2.2) se convierte en

$$\frac{w_e^* + w_s^*}{2} = m$$

y (1.2.3) se convierte en

$$w_s^* - w_e^* = \frac{1}{f(m)} = \sqrt{2\pi\sigma^2},$$

por lo que las ofertas de equilibrio de Nash son

$$w_s^* = m + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \qquad \text{y} \qquad w_e^* = m - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}.$$

Así, en equilibrio, las ofertas de las partes se centran alrededor de la esperanza del acuerdo preferido por el árbitro (es decir, m), y la distancia entre las ofertas aumenta con la incertidumbre de las partes acerca del acuerdo preferido por el árbitro (es decir, σ^2).

La interpretación de este equilibrio es simple. Cada parte se enfrenta a un dilema. Una oferta más agresiva (es decir, una oferta más baja por parte de la empresa o una oferta más alta por parte del sindicato) genera unas ganancias mayores si es elegida por el árbitro, pero es menos probable que sea elegida. (Veremos en el capítulo 3 que un dilema similar aparece en una licitación a pliego cerrado y al precio más alto: una puja más baja genera unas ganancias mayores si es la puja ganadora, pero reduce probabilidad de ganar.) Cuando hay más incertidumbre sobre el acuerdo preferido por el árbitro (es decir, σ^2 es más alta), las partes pueden permitirse ser más agresivas, puesto que una oferta agresiva tiene menos probabilidades de ser muy diferente del acuerdo preferido por el árbitro. Por el contrario, cuando apenas hay incertidumbre, ninguna parte puede permitirse hacer una oferta alejada de la media, porque es muy probable que el árbitro prefiera acuerdos cercanos a m.

1.2.D El problema de los ejidos

Al menos desde Hume (1739), los filósofos políticos y los economistas han entendido que si los ciudadanos responden únicamente a incentivos privados, habrá un déficit en la provisión de bienes públicos y los recursos públicos estarán sobreutilizados. Hoy en día, basta con fijarse en el medio ambiente para constatar la fuerza de esta idea. Fue el trabajo ampliamente citado de Hardin (1968) el que fijó la atención de los no economistas sobre el problema. A continuación analizamos un ejemplo bucólico.

Consideremos los n habitantes de una aldea. Cada verano todos los aldeanos llevan sus cabras a pastar en el ejido de la aldea. Denominamos g_i el número de cabras que el i-ésimo campesino posee y el número total de cabras en la aldea $G = g_1 + \ldots + g_n$. El coste de comprar y cuidar una cabra es c, independientemente de cuántas cabras se posean. El valor de criar una cabra en el ejido cuando allí se concentra un total de G cabras es $v(G)$ *por cabra*. Puesto que una cabra necesita al menos una cierta cantidad de pasto para sobrevivir, existe un número máximo de cabras que pueden pastar en el ejido, G_{max}:$v(G) > 0$ para $G < G_{max}$, pero $v(G) = 0$ para $G \geq G_{max}$. Por otra parte, puesto que las primeras cabras disponen de un amplio espacio para pastar, añadir una más no afecta a las que ya están allí, pero cuando hay tantas cabras pastando que apenas pueden sobrevivir (es decir, G está justo por debajo de G_{max}), añadir una cabra más afecta a las demás de forma dramática. Formalmente: para $G < G_{max}$, $v'(G) < 0$

y $v''(G) < 0$, como muestra la figura 1.2.4.

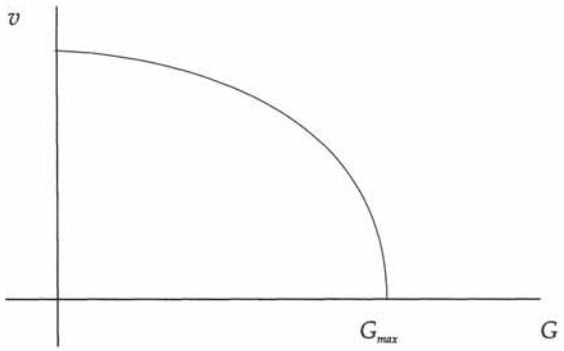

Figura 1.2.4

Durante la primavera, los aldeanos eligen simultáneamente cuántas cabras van a tener. Supongamos que las cabras son continuamente divisibles. Una estrategia del aldeano i es la decisión sobre el número de cabras que llevará a pastar en el ejido, g_i. Suponer que el espacio de estrategias es [0,∞) cubre todas las opciones del aldeano; [0,G_{max}) también bastaría. Las ganancias del aldeano i por criar g_i cabras cuando el número de cabras criadas por otros aldeanos es $g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1} \ldots, g_n$, es

$$g_i v(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i + g_{i+1}, \ldots + g_n) - c g_i. \tag{1.2.4}$$

Así, si $(g_1^*, \ldots, g_n^*)$ ha de constituir un equilibrio de Nash, para cada i, g_i^* debe maximizar (1.2.4) dado que los otros aldeanos eligen $(g_1^*, \ldots, g_{i-1}^*, g_{i+1}^*, \ldots, g_n^*)$. La condición de primer orden de este problema de optimización es

$$v(g_i + g_{-i}^*) + g_i v'(g_i + g_{-i}^*) - c = 0, \tag{1.2.5}$$

donde g_{-i}^* denota $g_1^* + \ldots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \ldots + g_n^*$. Sustituyendo g_i^* en (1.2.5), sumando todas las condiciones de primer orden de los n aldeanos y dividiendo luego por n se obtiene

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0, \tag{1.2.6}$$

donde G^* denota $g_1^* + \ldots + g_n^*$. Por el contrario, el óptimo social, denotado con G^{**}, es una solución de

$$\max_{0 \leq G < \infty} Gv(G) - Gc,$$

para la cual la condición de primer orden es

$$v(G^{**}) + G^{**}v'(G^{**}) - c = 0 \tag{1.2.7}$$

La comparación entre (1.2.6) y (1.2.7) muestra[13] que $G^* > G^{**}$: en el equilibrio de Nash se crían demasiadas cabras comparado con el óptimo social. La condición de primer orden (1.2.5) refleja los incentivos que tiene un aldeano que ya está criando g_i cabras pero considera añadir una más (o, de forma más precisa, una pequeña fracción de una más). El valor de la cabra adicional es $v(g_i + g^*_{-i})$ y su coste es c. El daño a las cabras ya existentes del aldeano es $v'(g_i + g^*_{-i})$ por cabra, o $g_i v'(g_i + g^*_{-i})$ en total. Los recursos comunales están sobreutilizados porque cada aldeano considera sólo su propia situación, y no el efecto de sus decisiones sobre los otros aldeanos; de aquí la presencia de $G^*v'(G^*)/n$ en (1.2.6), pero de $G^{**}v'(G^{**})$ en (1.2.7).

1.3 Teoría avanzada: Estrategias mixtas y existencia de equilibrio

1.3.A Estrategias mixtas

En la sección 1.1.C hemos definido S_i como el conjunto de estrategias con que cuenta el jugador i, y la combinación de estrategias $(s^*_1, \ldots, s^*_n)$ como un equilibrio de Nash si, para cada jugador i, s^*_i es la mejor respuesta del jugador i a las estrategias de los otros $n-1$ jugadores:

$$u_i(s^*_1, \ldots, s^*_{i-1}, s^*_i, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n) \geq u_i(s^*_1, \ldots, s^*_{i-1}, s_i, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n) \qquad \text{(EN)}$$

para cada estrategia s_i en S_i. Según esta definición no existe ningún equilibrio de Nash en el siguiente juego conocido como *el juego de las monedas (matching pennies).*

[13] Supongamos, a la inversa, que $G^* \leq G^{**}$. Entonces $v(G^*) \geq v(G^{**})$, puesto que $v' < 0$. Del mismo modo, $0 > v'(G^*) \geq v'(G^{**})$, puesto que $v'' < 0$. Finalmente, $G^*/n < G^{**}$. Así, el término de la izquierda de (1.2.6) es estrictamente mayor que el término de la izquierda de (1.2.7), lo cual es imposible dado que ambos son iguales a cero.