dECON
Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

Examen octubre de 2019. Duración: 2 horas. Es un examen con materiales a la vista.

1. Los ciudadanos de un país tienen preferencias sobre consumo privado (c_i) y gasto público (g) que pueden representarse por la siguiente función de utilidad: $u(c_i, g)$, con las propiedades usuales (en particular, creciente en ambos argumentos). Los individuos tienen la restricción presupuestal: $c_i \leq y_i(1-\tau)$. El gobierno enfrenta la siguiente restricción presupuestal: $g \leq \tau y$, donde $y = \sum_i y_i/N$ y N es el número total de ciudadanos.
1.1. (0,5 puntos) Escriba la función de utilidad indirecta, es decir la función que mapea de las ternas gasto público, tasas impositivas e ingresos a la máxima utilidad alcanzable por los individuos: $v(g, \tau, y_i)$.
1.2. (0,5 puntos) Escriba la función de preferencias de políticas, es decir la función que mapea de los niveles de gasto público factibles (o que respetan la restricción presupuestal del gobierno) e ingresos a la máxima utilidad alcanzable por los individuos: $w(g, y_i)$.
1.3. (0,5 puntos) Suponga ahora que $u(c_i, g) = ln(c_i) + ln(g)$. Muestre que los ratios deseados de consumo público a consumo privado son decrecientes en el ingreso, es decir que $g(y_i)/c_i$ decrece con y_i.

2. (1 punto) Un gobierno tiene la siguiente función de pérdidas: $G(s_t, e_t) = E[(s_t - e_t - s_G - \varepsilon_t)^2 + a(e_t - e_{t-1})^2]$. El significado de las letras es el usado en clase. Hay una central sindical que fija el salario nominal con una meta de salario real s_U. La varianza del shock es $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$ y, a diferencia de lo que supusimos en clase, $E[\varepsilon_t] > 0$. Determine la política óptima del gobierno bajo discreción.

3. (2 puntos) Un político elige una política p con el objetivo de maximizar: $G(p, \theta) = -(p-\theta)^2$. Sabe que θ puede adoptar dos valores, 0 y 1, con probabilidades 0,5. Hay un lobby que conoce el verdadero valor de θ pero tiene un sesgo δ en sus preferencias. La utilidad del lobby es $U(p, \theta) = -(p-\theta-\delta)^2$. Determine el rango de valores de δ compatibles con la existencia de equilibrios de revelación plena.

4. 4. (1 punto) Considere el modelo de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3) con información imperfecta. Los ciudadanos nunca observan directamente el tipo del político $(\tau = 0)$ y observan si la política se adecua al estado de la naturaleza con probabilidad 0,5 $(\chi = 0{,}5)$. Otros parámetros del modelo adoptan los siguientes valores:

$$E = 10\ ;\ \Delta = 1\ ;\ \beta = 0{,}5\ ;\ \pi = 0{,}5$$

Las rentas que puede extraer el político son aleatorias: se distribuyen en forma uniforme entre 10 y 20. En otras palabras, $r \in [10,20]$ y la densidad es constante en ese rango de rentas y es cero para cualquier otro rango.
4.1. Caracterice el equilibrio. Es agrupador, separador o semi-separador?
4.2. Determine la probabilidad de que el político disonante elija $e_1 = s_1$.
4.3. Aprenden los ciudadanos a lo largo del juego? Cuál es la probabilidad que asignan a que el incumbente sea congruente después de haber visto que (i) extrajo rentas y (ii) no extrajo rentas? Explique.

Pauta de respuesta

1.1. Escriba la función de utilidad indirecta, es decir la función que mapea de las ternas de gasto público y tasas impositivas a la máxima utilidad alcanzable por los individuos: $v(g, \tau, y_i)$.

En la esfera privada, los individuos resuelven el siguiente programa:

$$\max_{c_i} u(c_i, g)$$
$$sa: c_i \leq y_i(1-\tau)$$

En la medida en que la utilidad es creciente en el consumo privado, los individuos maximizan su utilidad eligiendo $c_i = y_i(1-\tau)$. Por lo tanto, la máxima utilidad que pueden alcanzar dados g y τ es: $v(g, \tau, y_i) = u(y_i(1-\tau), g)$.

1.2. Escriba la función de preferencias de políticas, es decir la función que mapea de los niveles de gasto público factibles (o que respetan la restricción presupuestal del gobierno) e ingresos a la máxima utilidad alcanzable por los individuos: $w(g, y_i)$.

En la esfera pública, los individuos resuelven el siguiente programa:

$$\max_{g,\tau} v(g, \tau, y_i)$$
$$sa: v(g, \tau, y_i) = u(y_i(1-\tau), g)$$
$$g \leq \tau y$$

En la medida en que la utilidad es creciente en el gasto público, los individuos maximizan su utilidad eligiendo $g = \tau y$. Por lo tanto, la máxima utilidad que pueden alcanzar dado g es: $w(g, y_i) = u(y_i(1-g/y), g)$.

1.3. Suponga ahora que $u(c_i, g) = ln(c_i) + ln(g)$. Muestre que los ratios deseados de consumo público a consumo privado son decrecientes en el ingreso, es decir que $g(y_i)/c_i$ decrece con y_i.

El gasto público óptimo para i se determina resolviendo el siguiente programa:

$$\max_{g} w(g, y_i) = u(y_i(1-g/y), g)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{y_i}{y} u_c = u_g$$

Y las utilidades marginales son: $u_c = 1/c_i$ y $u_g = 1/g$. Por lo tanto

$$\frac{g(y_i)}{c_i} = \frac{y}{y_i}$$

2. (1 punto) Un gobierno tiene la siguiente función de pérdidas: $G(s_t, e_t) = E[(s_t - e_t - s_G - \varepsilon_t)^2 + a(e_t - e_{t-1})^2]$. El significado de las letras es el usado en clase. Hay una central sindical que fija el salario nominal con una meta de salario real s_U. La varianza del shock es $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$ y, a diferencia de lo que supusimos en clase, $E[\varepsilon_t] > 0$. Determine la política óptima del gobierno bajo discreción.

Una forma de encontrar la respuesta es resolver como hicimos en clase. Una opción más corta es hacer un cambio de variable. Defino $\varepsilon_t' = \varepsilon_t - E[\varepsilon_t]$ y $s_G' = s_G + E[\varepsilon_t]$. Es inmediato entonces que (i) $E[\varepsilon'_t] = 0$, (ii) $E[\varepsilon'^2_t] = \sigma^2$ y (iii) $G(s_t, e_t) = E[(s_t - e_t - s_G' - \varepsilon_t')^2 + a(e_t - e_{t-1})^2]$. Este es exactamente el caso visto en clase, sólo que con ε_t' y s_G' en lugar de ε_t y s_G. La política discrecional óptima es entonces la que ya conocemos:

$$e_t = e_{t-1} + \frac{s_U - s_G'}{a} - \frac{1}{1+a}\varepsilon_t'$$

O, en términos de las variables originales s_G y ε_t:

$$e_t = e_{t-1} + \frac{s_U - s_G'}{a} - \frac{E[\varepsilon_t]}{a(1+a)} - \frac{1}{1+a}\varepsilon_t$$

Si se va por "la vía larga", se debe hacer lo siguiente:
a) Gobierno resuelve:

$$\min_{\kappa,\overline{\kappa}} E[(s_t - e_t - s_G - \varepsilon_t)^2 + a(e_t - e_{t-1})^2] \quad \textbf{(1)}$$
$$\textit{sujeto a:}\ \ e_t - e_{t-1} = \overline{\kappa} + \kappa\varepsilon_t$$
$$s_t = cte$$

CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial \kappa} = E[2(.)(-\varepsilon) + 2a(..)\varepsilon] = 0 \quad \textbf{(2)}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\kappa}} = E[2(.)(-1) + 2a(..)\varepsilon] = 0 \quad \textbf{(3)}$$

Operando en (2):

$$-(s_t - e_{t-1} - s_G)E[\varepsilon] + E[\varepsilon^2] + (1+a)E[\varepsilon]\overline{\kappa} + (1+a)E[\varepsilon^2]\kappa = 0 \quad \textbf{(4)}$$

Operando en (3):

$$-(s_t - e_{t-1} - s_G) + E[\varepsilon] + (1+a)\overline{\kappa} + (1+a)E[\varepsilon]\kappa = 0 \quad \textbf{(5)}$$

Despejo $(1+a)\overline{\kappa}$ en (5), lo sustituyo en (4) y reordeno términos:

$$\sigma^2 + (1+a)\sigma^2\kappa = 0 \quad \textbf{(6)}$$

Donde $\sigma^2 = E[\varepsilon^2] - \left[E[\varepsilon]\right]^2 > 0$. Por lo tanto:

$$\kappa = -\frac{1}{1+a} \tag{7}$$

Usando (7) en (5):

$$(1+a)\overline{\kappa} = s_t - e_{t-1} - s_G \tag{8}$$

b) La central sindical fija el salario del siguiente modo:

$$s_t = s_U + E[e_t] = s_U + e_{t-1} + \overline{\kappa} + \kappa E[\varepsilon] \tag{9}$$

Usando (7) y (9) en (8):

$$\overline{\kappa} = \frac{s_U - s_G}{a} - \frac{E[\varepsilon]}{a(1+a)} \tag{10}$$

Es inmediato que la solución obtenida "por la vía larga", las ecuaciones (7) y (10), es idéntica a la solución presentada en primer lugar.

3. (2 puntos) Un político elige una política p con el objetivo de maximizar: $G(p,\theta) = -(p-\theta)^2$. Sabe que θ puede adoptar dos valores, 0 y 1, con probabilidades 0,5. Hay un lobby que conoce el verdadero valor de θ pero tiene un sesgo δ en sus preferencias. La utilidad del lobby es $U(p,\theta) = -(p-\theta-\delta)^2$. Determine el rango de valores de δ compatibles con la existencia de equilibrios de revelación plena.

Observo primero que el lobby sólo puede tener incentivos a engañar cuando $\theta = 0$ si $\delta > 0$ y cuando $\theta = 1$ si $\delta < 0$. Considero los dos casos.

i. $\delta > 0$. Si el lobby observa $\theta = 0$, declara verazmente y el gobierno le cree –elige $p = 0$–, el lobby obtiene $U(0{,}0) = -(0-0-\delta)^2$. Si en cambio miente y el gobierno le cree –elige $p = 1$ siendo que $\theta = 0$–, el lobby obtiene $U(1{,}0) = -(1-0-\delta)^2$. El lobby no miente si $U(1{,}0) \leq U(0{,}0)$, es decir si: $\delta \leq 0{,}5$.

ii. $\delta < 0$. Si el lobby observa $\theta = 1$, declara verazmente y el gobierno le cree –elige $p = 1$–, el lobby obtiene $U(1{,}1) = -(1-1-\delta)^2$. Si en cambio miente y el gobierno le cree –elige $p = 0$ siendo que $\theta = 1$–, el lobby obtiene $U(0{,}1) = -(0-1-\delta)^2$. El lobby no miente si $U(0{,}1) \leq U(1{,}1)$, es decir si: $\delta \geq -0{,}5$.

Por lo tanto, hay equilibrios de revelación plena si $-0{,}5 \leq \delta \leq 0{,}5$.

4. (1 punto1) Considere el modelo de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3) con información imperfecta. Los ciudadanos nunca observan directamente el tipo del político

$(\tau = 0)$ y observan si la política se adecua al estado de la naturaleza con probabilidad 0,5 $(\chi = 0{,}5)$. Otros parámetros del modelo adoptan los siguientes valores:

$$E = 10\ ;\ \Delta = 1\ ;\ \beta = 0{,}5\ ;\ \pi = 0{,}5$$

Las rentas que puede extraer el político son aleatorias: se distribuyen en forma uniforme entre 10 y 20. En otras palabras, $r \in [10{,}20]$ y la densidad es constante en ese rango de rentas y es cero para cualquier otro rango.

4.1. Caracterice el equilibrio. Es agrupador, separador o semi-separador?

Los políticos disonantes se disciplinan si $r_1 \leq \beta\chi(\mu + E)$. Las rentas esperadas son $\mu = 15$. Por lo tanto, el disonante no extrae rentas en el primer período si $r_1 \leq \beta\chi(\mu + E) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times (15 + 10) = 25/4$. Pero las rentas nunca son menores a 10 y, por lo tanto, se verifica siempre que $r_1 > 25/4$. El disonante siempre extrae rentas. El equilibrio es separador.

4.2. Determine la probabilidad de que el político disonante elija $e_1 = s_1$.

Es cero. El disonante siempre extrae rentas.

4.3. Aprenden los ciudadanos a lo largo del juego? Cuál es la probabilidad que asignan a que el incumbente sea congruente después de haber visto que (i) extrajo rentas y (ii) no extrajo rentas? Explique.

Aprenden. Si el incumbente extrajo rentas, los ciudadanos concluyen con certeza que es disonante y si no las extrajo concluyen también con certeza que es congruente:

$$Prob(C|r_1 > 0) = 0\ , \qquad Prob(C|r_1 = 0) = 1$$

Esto surge formalmente de la regla de Bayes:

$$Prob(C|r_1 > 0) = \frac{Prob(r_1 > 0|C)\pi}{Prob(r_1 > 0|C)\pi + Prob(r_1 > 0|D)(1-\pi)} = \frac{0}{0 + 1 \times 0{,}5} = 0$$

$$Prob(C|r_1 = 0) = \frac{Prob(r_1 = 0|C)\pi}{Prob(r_1 = 0|C)\pi + Prob(r_1 = 0|D)(1-\pi)} = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 0 \times 0{,}5} = 1$$