Segundo parcial. Es una prueba con materiales a la vista

ADVERTENCIA: una respuesta sin fundamentación o explicación podrá ser calificada como insuficiente.

1. (2 puntos) Represente como un juego dinámico la interacción entre dos jugadores que juegan el dilema del prisionero dos veces seguidas. El juego de cada etapa genera los siguientes pagos: (Confesar, Confesar) (-3,-3); (Confesar, Negar) (0,-9); (Negar, Confesar), (-9,0); (Negar, Negar), (-1,-1). Antes de jugar por segunda vez, conocen las jugadas realizadas por el otro jugador la primera vez. Los pagos totales son la suma simple de los pagos de cada etapa.

1.1. Represente el juego usando la forma extensiva.

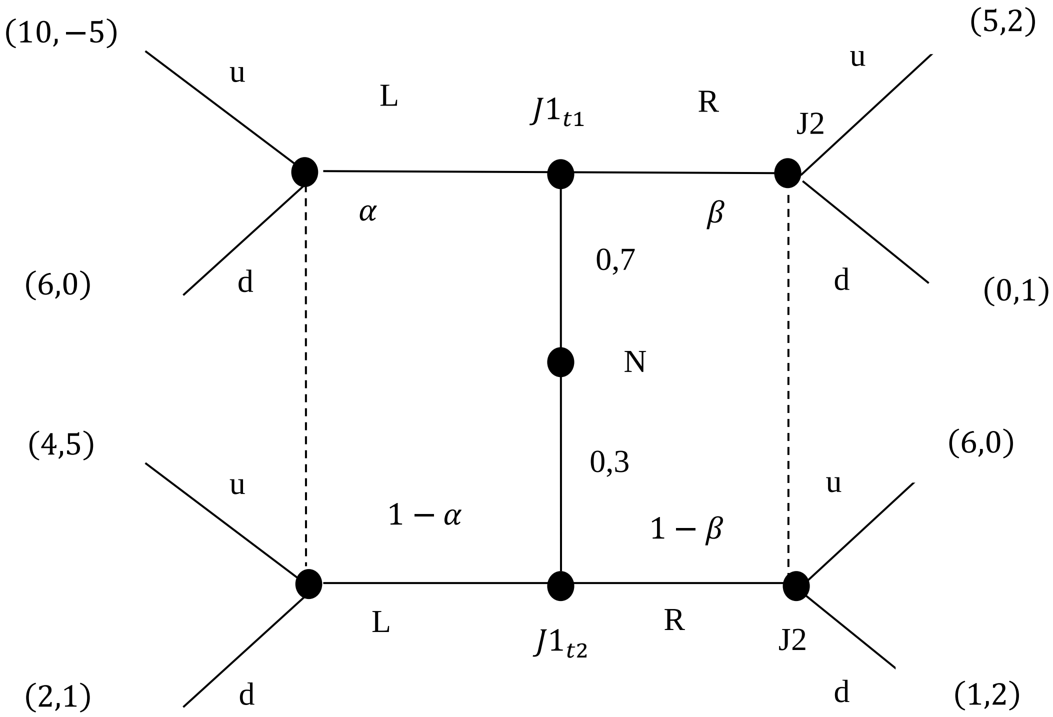
1.2. Identifique los conjuntos de información y los subjuegos. Explique

1.3. Determine los equilibrios del juego y diga si alguno de ellos es perfecto por subjuegos. Fundamente.

2. (2 puntos) Considere un juego de información incompleta con dos jugadores. El jugador 1 juega primero y puede jugar L o R. Tiene información completa sobre el juego. Hay dos tipos posibles del jugador informado, que llamaremos jugador 1 de tipo 1 ($J1_{t1}$) y jugador 1 de tipo 2 ($J1_{t2}$). El jugador 2 juega después y tiene tres acciones posibles: u, m y d. Sabe que hay dos tipos del jugador 1, pero no observa si el jugador 1 es de tipo 1 o de tipo 2. Al inicio del juego, se le informa que la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 1 es 0.2. Con independencia de si el jugador 1 es de tipo 1 o 2, el jugador 2 obtiene pagos iguales a (i) 3, 2 y 1 cuando juega u, m y d, respectivamente, si el jugador 1 jugó L, y (ii) 1, 2 y 3 cuando juega u, m y d, respectivamente, si el jugador 1 jugó R. El jugador 1 de tipo 1 obtiene pagos iguales a 6, 5 y 4 si juega izquierda y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente, y 4, 5 y 6 si juega derecha y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente. El jugador 1 de tipo 2 obtiene pagos iguales a 4, 5 y 6 si juega izquierda y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente, y 6, 5 y 4 si juega derecha y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente.

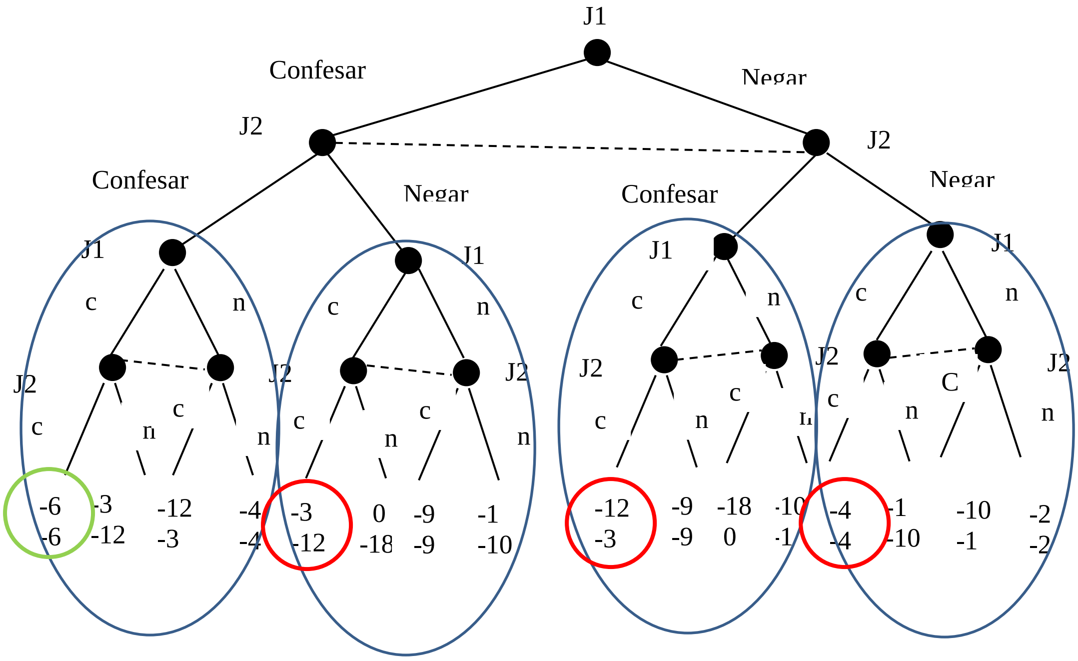
2.1. Represente el árbol del juego usando la transformación de Harsanyi. Identifique, en particular, los conjuntos de información del jugador desinformado.
2.2. Describa un perfil de estrategias.
2.3. ¿Existe un equilibrio separador LR, es decir en que el tipo 1 de jugador 1 juega L y el tipo 2 juega R? Si su respuesta es afirmativa, describa el perfil de estrategias y creencias en ese equilibrio y muestre que ese perfil y creencias conforman un equilibrio bayesiano perfecto. Si su respuesta es negativa, explique por qué no existe tal equilibrio.

3. (2 puntos) Considere el siguiente juego de información incompleta y diga si existe un equilibrio agrupador en L. Si su respuesta es afirmativa, describa las estrategias y creencias de los jugadores en ese equilibrio y muestre que las estrategias son mejores respuestas a las estrategias de los demás y el jugador 2 forma sus conjeturas racionalmente. Si su respuesta es negativa, indique por qué no existe tal tipo de equilibrio.


$(10, -5)$
u
L
$J1_{t1}$
R
J2
u
$(5,2)$
α
β
$(6,0)$
d
0,7
d
$(0,1)$
N
$(4,5)$
0,3
$(6,0)$
u
$1 - \alpha$
$1 - \beta$
u
L
$J1_{t2}$
R
J2
$(2,1)$
d
d
$(1,2)$

Pauta de respuesta

1.
1.1 El siguiente árbol representa en forma extensiva un dilema del prisionero repetido dos veces.



1.2 Los conjuntos de información son conjuntos de nodos donde debe jugar un jugador sin saber en cuál de ellos se encuentra. En este juego hay cinco conjuntos de información representados por líneas punteadas. El primer conjunto de información representa la primera jugada del jugador dos, que debe realizarla sin saber si el jugador 1 confesó o negó y los otros cuatro conjuntos de información representan la segunda jugada del jugador 2 en las mismas condiciones. Un subjuego es la parte del juego que resta jugar, comenzando en un nodo en el cual todas las jugadas anteriores son conocidas (singletons). En este juego hay cuatro subjuegos identificados con un óvalo azul que comienzan cuando al jugador 1 le toca jugar por segunda vez.

1.3 Como se trata de un juego dinámico con un juego estático repetido, para determinar el resultado debemos observar la última etapa del juego donde se ubican los cuatro subjuegos en los que los jugadores se enfrentan en un dilema del prisionero por segunda vez. Como sabemos que es un dilema del prisionero podemos establecer que en cada uno de los cuatro subjuegos el resultado de equilibrio es (Confesar, Confesar) señalado por una circunferencia. Considerando solamente la segunda etapa, es un dilema del prisionero simple, cuyo equilibrio de Nash puede verse en la siguiente matriz:

		Jugador 1	
		Confesar	Negar
Jugador 1	Confesar	(-3,-3)	(0,-9)
	Negar	(-9,0)	(-1,-1)

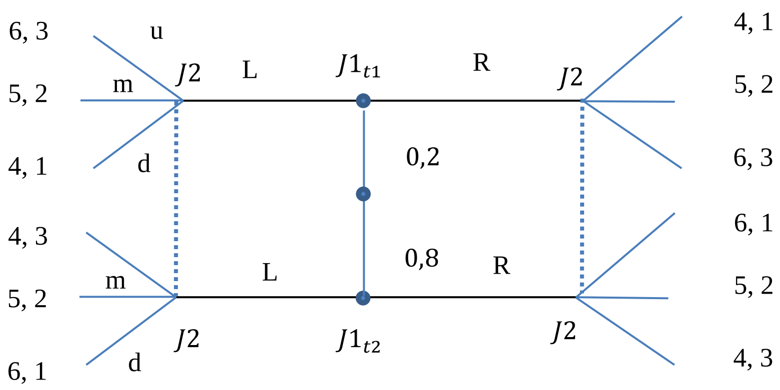
Por lo tanto, ambos jugadores saben que cuando jueguen por segunda vez, el resultado será (Confesar, Confesar), en cualquiera de los cuatro subjuegos. Pero sólo uno de esos cuatro resultados es perfectos por subjuegos, el perfil de estrategias (C,cccc,C,cccc), es decir confesar siempre (la primera vez, representada por la C mayúscula y en cualquiera de los cuatro subjuegos, representada por las c minúsculas) ya que, además de ser un equilibrio en ese subjuego, también es un equilibrio en el juego completo. Esto lo podemos apreciar en la siguiente matriz en la que representamos la primera etapa del juego, a la que sumamos los pagos que se recibirán en la segunda etapa conociendo de antemano el resultado representado por el equilibrio de la matriz anterior:

		Jugador 1	
		Confesar	Negar
Jugador 1	Confesar	(-3-3=-6,-3-3=-6)	(0-3=-3,-9-3=-12)
	Negar	(-9-3=-12,0-3=-3)	(-1-3=-4,-1-3=-4)

2. (2 puntos) Considere un juego de información incompleta con dos. El jugador 1 juega primero y puede jugar L o R. Tiene información completa sobre el juego. Hay dos tipos posibles del jugador informado, que llamaremos jugador 1 de tipo 1 ($J1_{t1}$) y jugador 1 de tipo 2 ($J1_{t2}$). El jugador 2 juega después y tiene tres acciones posibles: u, m y d. Sabe que hay dos tipos del jugador 1, pero no observa si el jugador 1 es de tipo 1 o de tipo 2. Al inicio del juego, se le informa que la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 1 es 0.2. Con independencia de si el jugador 1 es de tipo 1 o 2, el jugador 2 obtiene pagos iguales a (i) 3, 2 y 1 cuando juega u, m y d, respectivamente, si el jugador 1 jugó L, y (ii) 1, 2 y 3 cuando juega u, m y d, respectivamente, si el jugador 1 jugó R. El jugador 1 de tipo 1 obtiene pagos iguales a 6, 5 y 4 si juega izquierda y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente, y 4, 5 y 6 si juega derecha y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente. El jugador 1 de tipo 2 obtiene pagos iguales a 4, 5 y 6 si juega izquierda y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente, y 6, 5 y 4 si juega derecha y el jugador 2 juega u, m y d, respectivamente.

2.1. Represente el árbol del juego usando la transformación de Harsanyi. Identifique, en particular, los conjuntos de información del jugador desinformado.

La forma extensiva de este juego puede representarse así:



El jugador desinformado, J2, tiene dos conjuntos de información. Están compuestos por los dos nodos que siguen a las jugadas L y R del jugador 1. J2 observa si está en el conjunto de información de la izquierda o de la derecha, pero no observa si está en el nodo de arriba o de abajo.

2.2. Describa un perfil de estrategias.

Un perfil de estrategias es un plan de acción que indica las jugadas que seguirá cada jugador en cada conjunto de información en que le toca jugar. Un ejemplo posible es el siguiente:

- $J1_{t1}$ juega L

- $J1_{t2}$ juega R
- J2 juega u en el conjunto de información de la izquierda y d en el de la derecha.

2.3. ¿Existe un equilibrio separador LR, es decir en que el tipo 1 de jugador 1 juega L y el tipo 2 juega R? Si su respuesta es afirmativa, describa el perfil de estrategias y creencias en ese equilibrio y muestre que ese perfil y creencias conforman un equilibrio bayesiano perfecto. Si su respuesta es negativa, explique por qué no existe tal equilibrio.

Con independencia del tipo del jugador 1, para el jugador 2 es óptimo jugar u si el jugador 1 jugó L y d si jugó R. El jugador 1 concluye entonces que obtendrá lo mismo jugando L o R (si es de tipo 1, obtiene 6 y si es de tipo 2 obtiene 4). Por lo tanto, las jugadas L y R de los tipos 1 y 2, respectivamente, pueden ser parte de un equilibrio. En este equilibrio separador, el jugador desinformado debería concluir que $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

En resumen, hay un equilibrio separador en el que: (i) el jugador 1 de tipo 1 juega L, (ii) el jugador 1 de tipo 2 juega R, (iii) el jugador 2 juega u, si el jugador 1 jugó L, y d, si el jugador 1 jugó R y (iv) el jugador 2, después de observar la jugada del jugador 1, asigna probabilidades 1 y 0 a que el jugador 1 sea de tipo 1 si jugó L y R, respectivamente (antes de observar la jugada del jugador 1, el jugador 2 asigna una probabilidad de 0,2 a que el jugador 1 sea de tipo 1).

3. Si existiera un equilibrio agrupador en L, el jugador 2 debería concluir que $\alpha = 0{,}7$. La observación de la jugada L no es informativa en este caso y por lo tanto las probabilidades antes y después de observar L deberían ser iguales.

¿Cómo juega J2 en el conjunto de información L? Sus utilidades esperadas son:

$$UE_{J2}(u|L) = -5 \times 0{,}7 + 5 \times 0{,}3 = -2$$
$$UE_{J2}(d|L) = 0 \times 0{,}7 + 1 \times 0{,}3 = 0{,}3$$

Por lo tanto, J2 juega d después de que J1 jugó L.

¿Cómo juega J2 en el conjunto de información R? Sus utilidades esperadas son:

$$UE_{J2}(u|R) = 2 \times \beta + 0 \times (1 - \beta) = 2\beta$$
$$UE_{J2}(d|R) = 1 \times \beta + 2 \times (1 - \beta) = 2 - \beta$$

J2 elige (i) u si $2\beta > 2 - \beta$, o lo que es lo mismo si $\beta > 2/3$, (ii) d si $\beta < 2/3$ y (iii) es indiferente si $\beta = 2/3$.

Es óptimo para el jugador 1 de tipo 1 jugar L. Jugando L obtiene mejor pago que jugando R, con independencia de lo que haga el jugador 2.

El jugador 1 de tipo 2 obtiene un pago igual a 2 si juega L (dado que J2 juega d en ese conjunto de información). Si juega R obtiene un pago igual a 6 si $\beta \geq 2/3$ e igual a 1 si $\beta < 2/3$. Entonces, para que L sea una estrategia óptima para el jugador 1 de tipo 2 es necesario que la creencia del jugador 2 en el conjunto de información de la derecha sea $\beta < 2/3$.

En resumen, existe un equilibrio en el que:

(i) los dos tipos de jugador 1 juegan L,
(ii) el jugador 2 juega d en los dos conjuntos de información y
(iii) el jugador 2 espera $\alpha = 0{,}7$ y $\beta < 2/3$.

Un error frecuente en las respuestas fue concluir que necesariamente se cumple $\beta = 0$. Ese razonamiento se basa en que un jugador 1 de tipo 1 nunca jugaría R en este juego. Sin embargo, lo mismo puede decirse del jugador 1 de tipo 2 si hay un equilibrio agrupador en L. Por lo tanto, el conjunto de información de la derecha o, lo que es lo mismo, la jugada R de cualquiera de los dos tipos de jugador 1, está fuera del sendero de equilibrio. El jugador 2 no tiene bases sólidas para actualizar conjeturas después de observar R ya que estaría ocurriendo algo que “no podía ocurrir”. Por lo tanto, cualquier valor de β entre 0 y 1 es admisible.