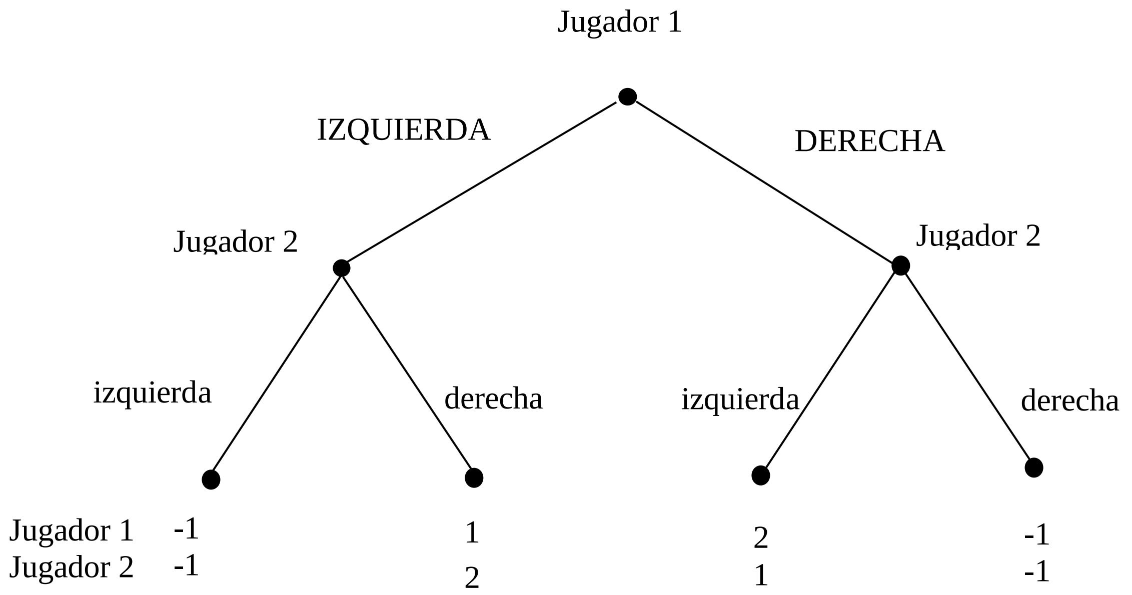
Segundo parcial. Es una prueba con materiales a la vista

ADVERTENCIA: una respuesta sin fundamentación o explicación podrá ser calificada como insuficiente.

1. (2 puntos) Considere el siguiente juego en forma extensiva:



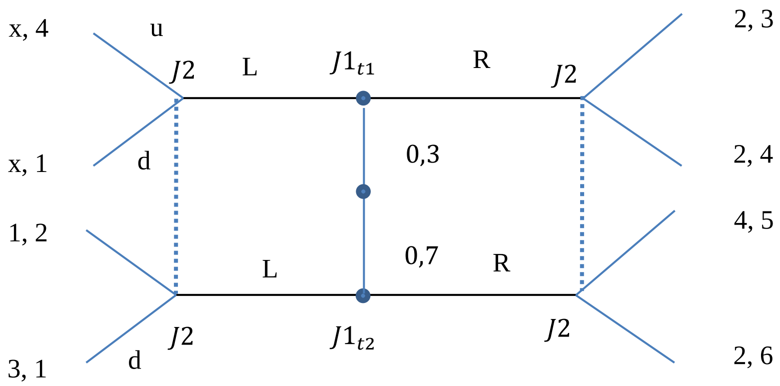
1.1. Identifique el resultado por retroinducción. Explique.
1.2. Identifique las estrategias de los jugadores y represente la forma normal del juego.
1.3. Identifique el o los equilibrios de Nash (en estrategias puras). Explique.
1.4. ¿Existe alguna “amenaza vacía” en el o los equilibrios de Nash que identificó?
Fundamente su respuesta.

2. (2 puntos) Considere un juego de información incompleta con dos jugadores. El jugador 1 juega primero y puede jugar L o R. Tiene información completa sobre el juego. Hay dos tipos posibles del jugador informado, que llamaremos jugador 1 de tipo 1 ($J1_{t1}$) y jugador 1 de tipo 2 ($J1_{t2}$). El jugador 2 juega después y tiene dos acciones posibles: u y d. Sabe que hay dos tipos del jugador 1, pero no observa si el jugador 1 es de tipo 1 o de tipo 2. Al inicio del juego, se le informa que la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 1 es 0.4. El jugador $J1_{t1}$ tiene pagos iguales a 3 si juega L y a 2 si juega R, con independencia de lo que juegue J2. El jugador $J1_{t2}$ tiene pagos iguales a 1 y 3, si juega L y J2 juega u y d, respectivamente, y a 4 y 2 si juega R y J2 juega u y d, respectivamente. El jugador J2 tiene pagos iguales a 3 si juega u y 1 si juega d, con independencia del tipo del jugador 1.

2.1. Represente el árbol del juego usando la transformación de Harsanyi.
2.2. Describa un perfil de estrategias y un conjunto de creencias del jugador desinformado.
2.3. ¿Existe un equilibrio separador LR, es decir en que el tipo 1 de jugador 1 juega L y el tipo 2 juega R? Si su respuesta es afirmativa, describa el perfil de estrategias y creencias en ese equilibrio y muestre que ese perfil y creencias conforman un equilibrio bayesiano perfecto. Si su respuesta es negativa, explique por qué no existe tal equilibrio.

3. (2 puntos) Considere el siguiente juego de información incompleta y diga si existe un equilibrio semiseparador en L. Si su respuesta es afirmativa, describa las estrategias y creencias de los jugadores en ese

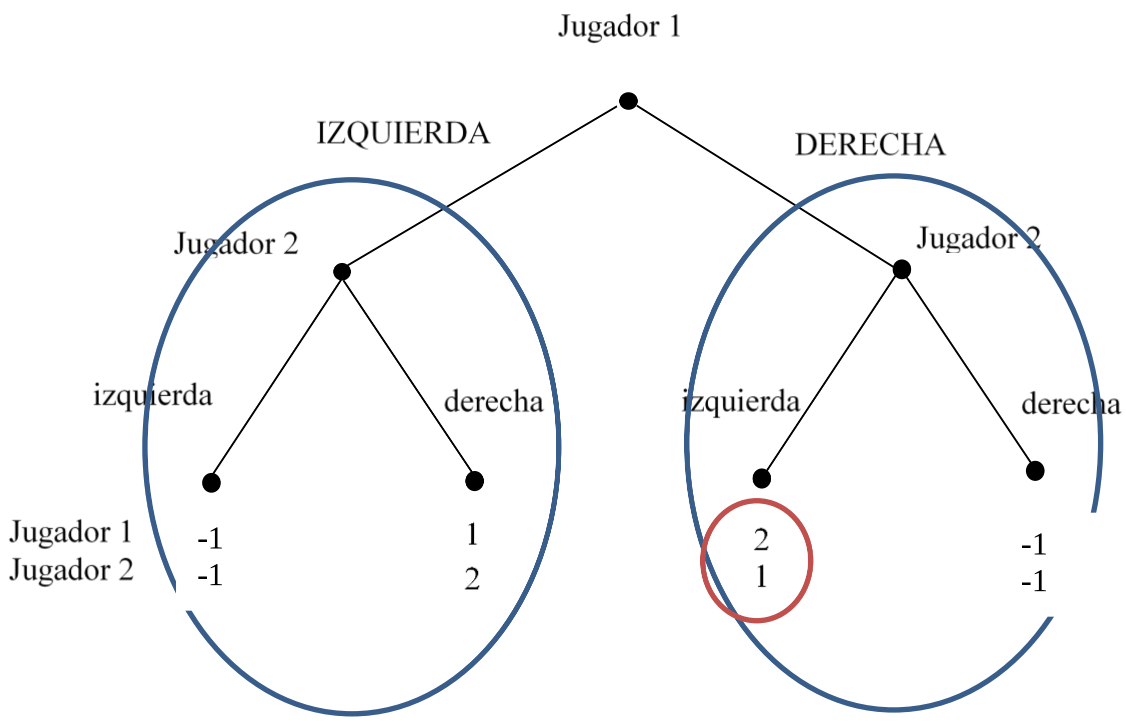
equilibrio y muestre que las estrategias son mejores respuestas a las estrategias de los demás y el jugador 2 forma sus conjeturas racionalmente. Si su respuesta es negativa, indique por qué no existe tal tipo de equilibrio.



Donde $x = 10$ con probabilidad 0,2 y $x = 1$ con probabilidad 0,8.

Pauta de respuesta

1. (2 puntos)



1.1 Para encontrar el resultado por retroinducción primero debemos calcular las respuestas del jugador 2 a las dos posibles jugadas del primer jugador. Así vemos que si el jugador 1 juega I, al jugador 2 le conviene responde con d y si el jugador 1 juega D, al jugador 2 le conviene responder con i. Sabiendo esto, el jugadora 1 evalúa ambos posibles resultados y decide jugar D, de forma de obtener un pago de 2 en lugar de 1 que obtendría jugando I. El resultado del juego por retroinducción entonces es (D,i).

1.2 J1 tiene dos estrategias que coinciden con sus acciones: I y D. J2 tiene cuatro estrategias: (i,i); (i,d); (d,i); (d,d). Una estrategia para el jugador 2 es un plan de acción que indica qué hacer en cada nodo que le toca jugar. Por lo tanto, debe especificarse las acciones que tomará después de que el jugador 1 eligió I y después de que el jugador 1 eligió D. La convención que usamos en esta caracterización de las cuatro estrategias es la siguiente: la acción indicada antes de la coma corresponde a la acción que elige el jugador 2 después de que el jugador 1 jugó I y la acción indicada después de la coma corresponde a la elección del jugador 2 después de que el jugador 1 jugó D. La siguiente matriz representa el juego utilizando la forma normal

		Jugador 2			
		(i,i)	(i,d)	(d,i)	(d,d)
Jugador 1	I	(-1,-1)	(-1,-1)	(1,2)	(1,2)
	D	(2,1)	(-1,-1)	(2,1)	(-1,-1)

1.3 El juego tiene 3 equiibrios de Nash en estrategias puras que corresponden a los perfiles de estrategia D,(i,i); D,(d,i) y I(d,d)). Los 3 son equilibrios de Nash porque contienen las mejores respuestas de ambos jugadores a las jugadas del otro jugador: Si J1 juega D, las mejores respuestas de J2 son (i,i) y (d,i) y si el

J1 juega I, las mejores respuestas del J2 son (d,i) y (d,d). Asimismo, si el J2 juega (i,i), la mejor respuesta del J1 es D, si el J2 juega (d,i) la mejor respuesta del J1 también es D y, si el J2 juega (d,d), la mejor respuesta del J1 es I.

1.4 Dos de los equilibrios de Nash en la matriz contienen amenazas vacías ya que el resultado por retroinducción las descarta. El equilibrio D,(d,i) coincide con el resultado por retroinducción, por lo tanto los equilibrios D,(i,i) y I(d,d)) contienen amenazas vacías y como veremos no son perfectos por subjuegos. El juego tiene dos subjuegos. Analizo ahora cada equilibrio de Nash en cada uno de los subjuegos:

a) (D,(i,i)). En el subjuego de la izquierda, este par de estrategias no es un equilibrio de Nash, dado que J2, que es el único jugador activo en ese subjuego, debría elegir d porque de esa forma obtiene 2 en lugar de -1. Este par de estrategias sí es un equilibrio de Nash en el subjuego de la derecha, ya que J2, que es el único jugador que juega en este subjuego, obtiene un mejor resultado jugando i que jugando d.

b) (D,(d,i)). En el subjuego de la izquierda, este par de estrategias es un equilibrio de Nash, dado que es óptimo para J2 elegir d y J2 es el único jugador activo en ese subjuego. También es un equilibrio de Nash en el subjuego de la derecha, ya que J2 obtiene un mejor resultado jugando i que jugando d.

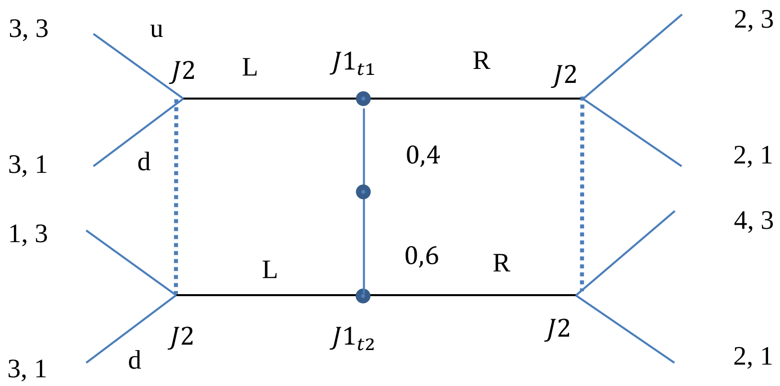
c) (I,(d,d)). En el subjuego de la izquierda, este par de estrategias es un equilibrio de Nash, dado que J2, el único jugador activo en ese subjuego, obtiene mayor utilidad jugando d que jugando i. En cambio no es un equilibrio de Nash en el subjuego de la derecha, ya que J2 obtiene un mejor resultado jugando i que jugando d.

Por lo tanto, el único equilibrio de Nash del juego completo que es perfecto por subjuegos es (D,(d,i)) porque es un equilibrio en los dos subjuegos además de ser un equilibrio en el juego completo. Los otros dos equilibrios de Nash contienen “amenazas vacías” de J2. En el caso a) la amenaza sería jugar i cuando J1 juegue I y en el caso c) la amenaza sería jugar d cuando J1 juegue D. En ambos casos no resulta racional cumplir la amenaza porque J2 obtiene mayor utilidad al no cumplirla.

2. (2 puntos) Considere un juego de información incompleta con dos jugadores. El jugador 1 juega primero y puede jugar L o R. Tiene información completa sobre el juego. Hay dos tipos posibles del jugador informado, que llamaremos jugador 1 de tipo 1 ($J1_{t1}$) y jugador 1 de tipo 2 ($J1_{t2}$). El jugador 2 juega después y tiene dos acciones posibles: u y d. Sabe que hay dos tipos del jugador 1, pero no observa si el jugador 1 es de tipo 1 o de tipo 2. Al inicio del juego, se le informa que la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 1 es 0.4. El jugador $J1_{t1}$ tiene pagos iguales a 3 si juega L y a 2 si juega R, con independencia de lo que juegue J2. El jugador $J1_{t2}$ tiene pagos iguales a 1 y 3, si juega L y J2 juega u y d, respectivamente, y a 4 y 2 si juega R y J2 juega u y d, respectivamente. El jugador J2 tiene pagos iguales a 3 si juega u y 1 si juega d, con independencia del tipo del jugador 1 y de la jugada del jugador 1.

2.1. Represente el árbol del juego usando la transformación de Harsanyi.

La forma extensiva de este juego puede representarse así:



2.2. Describa un perfil de estrategias y un conjunto de creencias del jugador desinformado.

Perfil de estrategias:
1. Estrategia de $J1_{t1}$: jugar L
2. Estrategia de $J1_{t2}$: jugar L
3. Estrategia de $J2$: jugar u siempre, es decir después de que J1 jugó L y después de que jugó R.

Creencias de $J2$: $\Pr(J1_{t1}|L) = 1$, $\Pr(J1_{t1}|R) = 0$

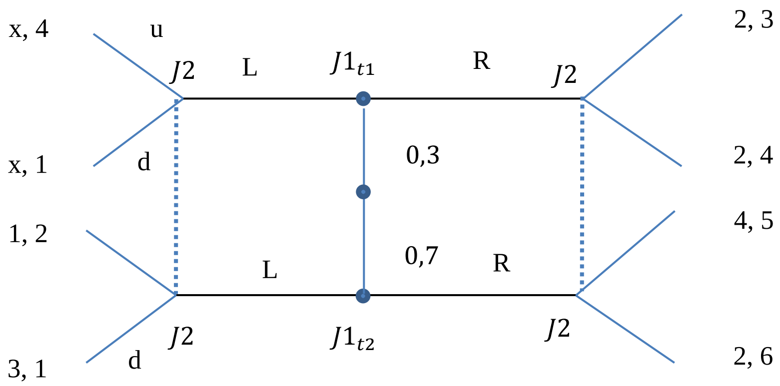
Nota: Como se pide en la letra, esto es solo un ejemplo. Cualquier otra respuesta que describa correctamente un perfil de estrategias y unas creencias es igualmente correcta. No se pregunta si estas estrategias son mejores respuestas o si las creencias son razonables.

2.3. ¿Existe un equilibrio separador LR, es decir en que el tipo 1 de jugador 1 juega L y el tipo 2 juega R? Si su respuesta es afirmativa, describa el perfil de estrategias y creencias en ese equilibrio y muestre que ese perfil y creencias conforman un equilibrio bayesiano perfecto. Si su respuesta es negativa, explique por qué no existe tal equilibrio.

Si existiera un equilibrio separador en el que $J1_{t1}$ juega L y $J1_{t2}$ juega R, $J2$ debería concluir que $\Pr(J1_{t1}|L) = 1$, $\Pr(J1_{t1}|R) = 0$. Estas son las únicas creencias que cumplen con la regla de Bayes si hay un equilibrio separador como el indicado.

Por otra parte, el jugador 2 va a jugar u en ambos conjuntos de información ya que jugar d está dominado. $J1_{t1}$ prefiere jugar L a R, ya que obtiene 3 y 2, respectivamente, con independencia de la jugada de $J2$. Finalmente, $J1_{t2}$ anticipa la jugada de $J2$ y deduce que si juega L obtendrá 1 y si juega R obtendrá 4. Por lo tanto, $J1_{t2}$ prefiere jugar R. En conclusión, hay un equilibrio separador LR, con las creencias indicadas.

3. (2 puntos) Considere el siguiente juego de información incompleta y diga si existe un equilibrio semiseparador en L. Si su respuesta es afirmativa, describa las estrategias y creencias de los jugadores en ese equilibrio y muestre que las estrategias son mejores respuestas a las estrategias de los demás y el jugador 2 forma sus conjeturas racionalmente. Si su respuesta es negativa, indique por qué no existe tal tipo de equilibrio.



Donde $x = 10$ con probabilidad 0,2 y $x = 1$ con probabilidad 0,8.

Resolvemos por retroinducción.

Mejores respuestas de $J2$:

a) Si J1 eligió L, $J2$ elige u ya que d está dominada. Se pueden calcular las utilidades esperadas para verificarlo, pero no es estrictamente necesario. Si queremos calcularlas, tenemos lo siguiente:

$$UE_{J2}(u|L) = 4 \times \alpha + 2 \times (1 - \alpha) = 2 + 2\alpha$$
$$UE_{J2}(d|L) = 1 \times \alpha + 1 \times (1 - \alpha) = 1$$

➔ $UE_{J2}(u|L) > UE_{J2}(d|L)$ para cualquier valor de α entre 0 y 1.

Por lo tanto, J2 juega u después de que J1 jugó L.

b) Si J1 eligió R, $J2$ elige d ya que u está dominada. $J2$ tiene las siguientes utilidades esperadas después de observar que J1 jugó R:

$$UE_{J2}(u|R) = 3 \times \beta + 5 \times (1 - \beta) = 5 - 2\beta$$
$$UE_{J2}(d|R) = 4 \times \beta + 6 \times (1 - \beta) = 6 - 2\beta$$

➔ $UE_{J2}(d|L) - UE_{J2}(u|L) = 1 > 0$.

Mejores respuestas de $J1_{t1}$:

Si juega L, obtiene x y si juega R obtiene 2. Por lo tanto, le conviene jugar L cuando x = 10 y R cuando x = 1. Esto implica que $J1_{t1}$ juega L con probabilidad 0,2 y R con probabilidad 0,8.

Mejores respuestas de $J1_{t2}$:

Sabe que obtendrá 1 si juega L, ya que J2 elige u después de observar L. Si juega R obtiene al menos 2. Por lo tanto, lo mejor que puede hacer $J1_{t2}$ es jugar R.

Con este resultado ya puede darse una respuesta a la pregunta: no existe un equilibrio semiseparador en L, es decir un equilibrio en el que los jugadores 1 a veces se agrupan en L y a veces se separan. Sabemos que es así porque concluímos que el jugador 1 de tipo 2 nunca elige L.

Dada la formulación de la pregunta, no era necesario caracterizar totalmente un equilibrio semiseparador en R que existe en este juego. Alcanzaba con mostrar que no hay uno en L. Pero varios estudiantes prefirieron caracterizar el equilibrio semiseparador en R y estas respuestas son también correctas. Sin embargo, para que esta caracterización sea completa, nos falta evaluar las creencias de J2

Creencias de $J2$:

Ahora que sabemos que $J1_{t1}$ juega L y R con probabilidades 0,2 y 0,8, respectivamente, y y $J1_{t2}$ juega L y R con probabilidades 0 y 1, respectivamente, podemos determinar las mejores conjeturas de J2 respecto al tipo del jugador 1 después de observar que se jugó L y R:

$$\alpha = \Pr(J1_{t1}|L) = \frac{\Pr(L|J1_{t1}) \times \Pr(J1_{t1})}{\Pr(L|J1_{t1}) \times \Pr(J1_{t1}) + \Pr(L|J1_{t2}) \times \Pr(J1_{t2})}$$

$$\alpha = \frac{0{,}2 \times 0{,}3}{0{,}2 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}7} = 1$$

$$\beta = \Pr(J1_{t1}|R) = \frac{\Pr(R|J1_{t1}) \times \Pr(J1_{t1})}{\Pr(R|J1_{t1}) \times \Pr(J1_{t1}) + \Pr(R|J1_{t2}) \times \Pr(J1_{t2})}$$

$$\beta = \frac{0{,}8 \times 0{,}3}{0{,}8 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}7} = 0{,}255$$

En resumen, existe un equilibrio semiseparador en R en el que:

1. $J1_{t1}$ juega L con probabilidad 0,2 y R con probabilidad 0,8.
2. $J1_{t2}$ juega R con probabilidad 1.
3. J2 juega u si J1 jugó L y d si J1 jugó R.
4. $\alpha = 1$ y $\beta = 0{,}255$.

No hay entonces un equilibrio semiseparador en L ya que $J1_{t2}$ juega siempre R. Hay un equilibrio semiseparador en R, ya que $J1_{t1}$ juega R a veces y $J1_{t2}$ siempre juega R.