Teoría de juegos
Examen 14 de febrero de 2022

Macar lo que corresponda: Reglamentado ☐ Libre ☐

Nombre ____ C.I. ______________________________________

Es una prueba con materiales a la vista

ADVERTENCIA: una respuesta sin fundamentación o explicación podrá ser calificada como insuficiente.

Estudiantes reglamentados: Deben realizar los dos ejercicios de la primera parte y uno a elección de la segunda parte. Se califica sobre tres ejercicios. Disponen de una hora y media.
Estudiantes libres: Deben realizar la totalidad del examen. Se califica sobre cuatro ejercicios. Disponen de dos horas.

Primera parte

Ejercicio 1 (2 puntos)

La siguiente matriz representa un juego estático entre el Jugador 1 (J1) y el Jugador 2 (J2). Los números a la izquierda y a la derecha de cada celda representan los pagos de J1 y J2, respectivamente.

		J2							
		a_2		b_2		c_2		d_2	
J1	A_1	10	2	6	9	0	-2	2	0
	B_1	7	11	10	10	-1	-1	3	5
	C_1	2	0	-1	-1	7	3	5	7
	D_1	5	2	0	5	-2	0	0	10

1.1 Determine si los jugadores tienen estrategias dominadas. En caso afirmativo, reduzca la matriz eliminándolas.
1.2 Halle el o los equilibrios del juego en estrategias puras. Fundamente su respuesta.
1.3 ¿Existen perfiles de estrategias que provean una mayor utilidad social (entendida como la sumatoria de los pagos) que la que se obtiene en el o los equilibrios hallados? En caso afirmativo, ¿por qué no pueden alcanzarse dichos perfiles de estrategias?

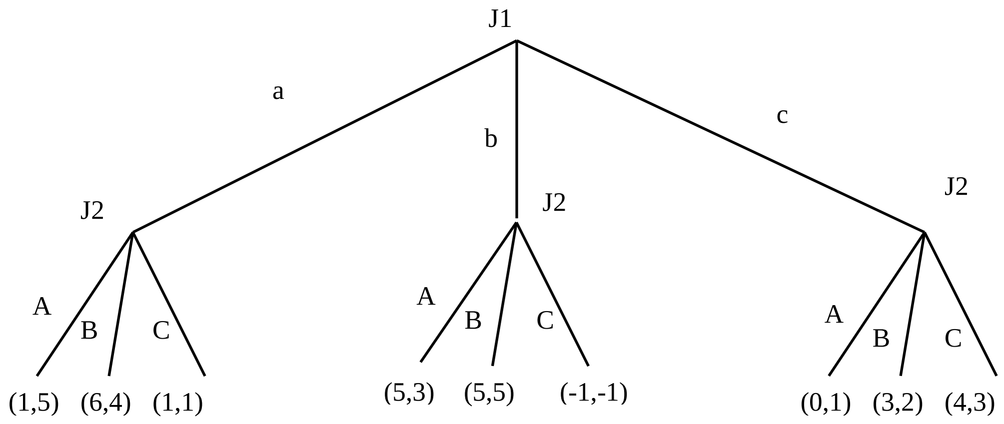
Ejercicio 2 (1 punto)

Un votante piensa que el 80% de los políticos es honesto y el 20% es deshonesto. Un honesto nunca roba. Un deshonesto roba si las circunstancias son propicias. El votante piensa que la probabilidad de que un deshonesto robe es 60%.
2.1. ¿Qué probabilidad debe asignar el votante a que un político sea honesto después de observar que robó? Fundamente su respuesta.
2.2. ¿Qué probabilidad debe asignar el votante a que un político sea honesto después de observar que **no** robó? Fundamente su respuesta.

Segunda parte

Ejercicio 3 (2 puntos)

A partir del siguiente juego dinámico.



3.1 Determine el resultado del juego representado utilizando retroinducción (explique).

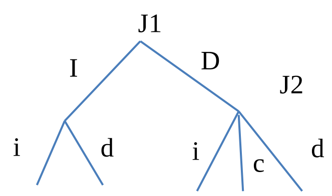
3.2 Diga cuántas estrategias tiene el jugador 2.

3.3 Indique el par de estrategias que conducen al resultado obtenido por retroinducción.

3.4 Establezca si ese perfil de estrategias es un equilibrio perfecto por subjuegos (fundamente).

Ejercicio 4 (2 puntos)

Considere un juego de información perfecta con la siguiente forma extensiva:



4.1. ¿Cuántas estrategias tiene cada jugador? Descríbalas.
4.2. Suponga ahora que alguien sugiere la hipótesis de que J2 ignora la jugada previa de J1, siendo todo lo demás igual. Es decir que se argumenta que el fenómeno que se quiere analizar se representa mejor con un juego de información imperfecta. ¿Es eso posible o razonable? Si su respuesta es afirmativa, identifique las estrategias en el juego de información imperfecta. Si no lo es, explique por qué.

Pauta de respuesta

Ejercicio 1

1.1 Para determinar si hay estrategias dominadas empezamos por el J1. Comparamos sus pagos de a pares de estrategias (para todos los pares). Observamos que A_1 domina estrictamente a D_1, por lo que se elimina esta última. En el caso de J2 observamos que la estrategia D_2 domina estrictamente a C_2, por lo que se puede eliminar a esta última. Al volver a revisar si con las eliminaciones todavía hay estrategias estrictamente dominadas, notamos que no es el caso, por lo que ya no puede reducirse más la matriz, y queda del siguiente modo:

		J2					
		a_2		b_2		d_2	
	A_1	10	2	6	9	2	0
J1	B_1	7	11	10	10	3	5
	C_1	2	0	-1	-1	5	7

1.2 Pasamos a hallar equilibrios de Nash. Para ello observamos cuáles son las mejores respuestas de cada jugador, dada la jugada del otro. Marcamos en amarillo las mejores jugadas de J1 y en verde las de J2. Encontramos que existe un equilibrio de Nash en estrategias puras en el perfil (C_1 , d_2), con pagos (5 , 7).

1.3 El equilibrio resultante no es un óptimo social en la medida en que no maximiza la utilidad social (entendida como la sumatoria de pagos obtenidos por ambos jugadores). Por ejemplo, el perfil de estrategias (B_1 , b_2) maximiza la utilidad social ya que la sumatoria de pagos es igual a 20 (10+10), por lo que sería el resultado que un planificador social buscaría alcanzar. Sin embargo, dadas las características del juego, y los supuestos sobre racionalidad de ambos jugadores, dicho resultado no se alcanzará pues no constituye una combinación de mejores respuestas, es decir, no es un equilibrio del juego.

Ejercicio 2 (1 punto)

Un votante piensa que el 80% de los políticos es honesto y el 20% es deshonesto. Un honesto nunca roba. Un deshonesto roba si las circunstancias son propicias. El votante piensa que la probabilidad de que un deshonesto robe es 60%.

2.1. ¿Qué probabilidad debe asignar el votante a que un político sea honesto después de observar que robó? Fundamente su respuesta.

El votante debería asignar una probabilidad cero a que un político sea honesto después de observar que robó ya que si hubiera sido honesto no habría robado. Esto puede verse más formalmente usando Bayes:

$$Pr(H|roba) = \frac{Pr(roba|H)Pr(H)}{Pr(roba|H)Pr(H) + Pr(roba|D)Pr(D)}$$

Donde $Pr(H|roba)$ es la probabilidad de que el político sea honesto dado que robó, etc. El votante sabe que un político honesto nunca roba, es decir que sabe que $Pr(roba|H) = 0$. Esto implica que:

$$Pr(H|roba) = \frac{0 \times Pr(H)}{0 \times Pr(H) + Pr(roba|D)Pr(D)} = 0$$

2.2. ¿Qué probabilidad debe asignar el votante a que un político sea honesto después de observar que **no** robó? Fundamente su respuesta.

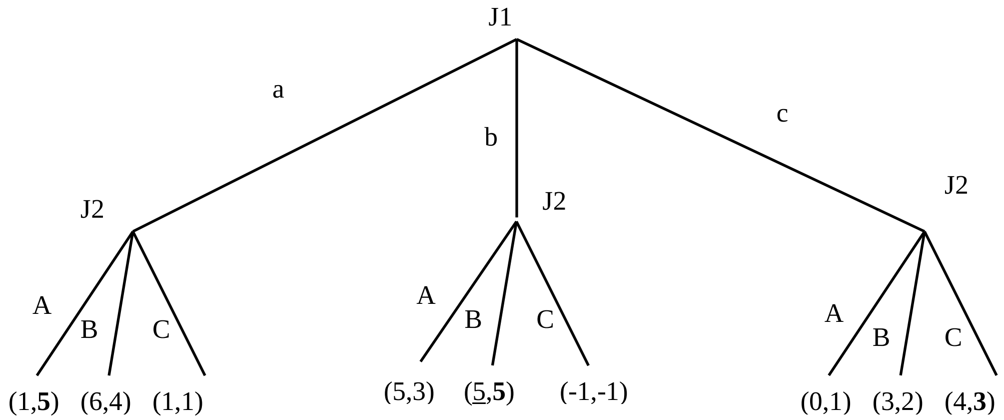
Usando Bayes:

$$Pr(H|no\ roba) = \frac{Pr(no\ roba|H)Pr(H)}{Pr(no\ roba|H)Pr(H) + Pr(no\ roba|D)Pr(D)}$$

El votante sabe que un político honesto no roba, es decir que $Pr(no\ roba|H) = 1$, y que un político deshonesto no roba con probabilidad $Pr(no\ roba|D) = 1 - Pr(roba|D) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Entonces:

$$Pr(H|no\ roba) = \frac{1 \times 0{,}8}{1 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}2} = 0{,}91$$

Ejercicio 3



La retroinducción implica determinar, en primer término, las mejores jugadas del segundo jugador para todas las posibles jugadas del primero (con sus respectivos pagos señalados en negrita en el árbol). Si el Jugador 1 elige jugar a, al Jugador 2 le conviene responder con A; si el Jugador 1 decide jugar b, al Jugador 2 le conviene jugar B; y si el Jugador 1 opta por jugar c, al jugador 2 le conviene responder con C. Sabiendo las mejores respuestas del Jugador 2, el Jugador 1 debería elegir jugar b, ya que sabe que el Jugador 2 responderá con B y obtendrá una utilidad de 5, que es superior a la que obtendría jugando a (1) o d (4). El resultado por retroinducción entonces es (b,B)

El jugador 2 tiene 27 estrategias, lo que resulta de combinar sus posibles acciones (3) con las posibles acciones del Jugador 1 (3): 3 x 3 x 3 = 27

El resultado por retroinducción corresponde al perfil de estrategias (b,ABC), que es un equilibrio de Nash ya que incluye las mejores jugadas de los dos jugadores dada la jugada del otro jugador. Para el jugador 2, la mejor respuesta es jugar A, si el J1 juega a, jugar B, si el J1 juega b y jugar C si el J1 juega c. A su vez, para el Jugador 1 la mejor respuesta a la estrategia ABC del Jugador 2 es jugar b.

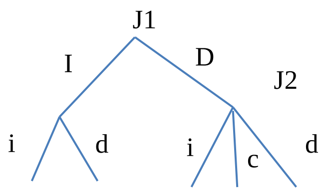
Ese equilibrio es perfecto por subjuegos ya que, además de ser un equilibrio en el juego completo, lo que vimos en el punto anterior, es también un equilibrio en el subjuego que comienza luego de que el Jugador 1 elige b, porque en ese subjuego sólo juega el Jugador 2 y su mejor respuesta es jugar B.

		Jugador 1		
		a	b	c
Jugad	AAA	(1,5)	(5,3)	(0,1)
	AAB	(1,5)	(5,3)	(3,2)

AAC	(1,5)	(5,3)	(4,3)
ABA	(1,5)	(5,5)	(0,1)
ABB	(1,5)	(5,5)	(3,2)
ABC	(1,5)	(5,5)	(4,3)
ACA	(1,5)	(-1,-1)	(0,1)
ACB	(1,5)	(-1,-1)	(3,2)
ACC	(1,5)	(-1,-1)	(4,3)
BAA	(6,4)	(5,3)	(0,1)
BAB	(6,4)	(5,3)	(3,2)
BAC	(6,4)	(5,3)	(4,3)
BBA	(6,4)	(5,5)	(0,1)
BBB	(6,4)	(5,5)	(3,2)
BBC	(6,4)	(5,5)	(4,3)
BCA	(6,4)	(-1,-1)	(0,1)
BCB	(6,4)	(-1,-1)	(3,2)
BCC	(6,4)	(-1,-1)	(4,3)
CAA	(1,1)	(5,3)	(0,1)
CAB	(1,1)	(5,3)	(3,2)
CAC	(1,1)	(5,3)	(4,3)
CBA	(1,1)	(5,5)	(0,1)
CBB	(1,1)	(5,5)	(3,2)
CBC	(1,1)	(5,5)	(4,3)
CCA	(1,1)	(-1,-1)	(0,1)
CCB	(1,1)	(-1,-1)	(3,2)
CCC	(1,1)	(-1,-1)	(4,3)

Ejercicio 4 (2 puntos)

Considere un juego de información perfecta con la siguiente forma extensiva:



4.1. ¿Cuántas estrategias tiene cada jugador? Descríbalas.

J1 tiene 2 y J2 tiene 6 estrategias.
J1: I, D
J2: ii, ic, id, di, dc, dd

4.2. Suponga ahora que alguien sugiere la hipótesis de que J2 ignora la jugada previa de J1, siendo todo lo demás igual. Es decir que se argumenta que el fenómeno que se quiere analizar se representa mejor con un juego de información imperfecta. ¿Es eso posible o razonable? Si su respuesta es afirmativa, identifique las estrategias en el juego de información imperfecta. Si no lo es, explique por qué.

No es razonable esta hipótesis. No es posible que el jugador 2 tenga un número diferente de acciones posibles en distintos nodos de un mismo conjunto de información. Si J2 pudiera elegir entre dos acciones después de I y entre tres después de D, necesariamente podría distinguir entre I y D. No sería entonces un juego de información imperfecta.