Examen diciembre de 2021. Duración: 2 horas. Es un examen con materiales a la vista.

1. (1 punto) Los ciudadanos de un país tienen que votar sobre el tamaño de un programa público. El servicio brindado a cada individuo es g y el gobierno lo financia con un impuesto de suma fija, igual para todos los individuos: $\tau = g$. Todos los ciudadanos tienen el mismo ingreso bruto y y disponible $y - \tau$, que utilizan para financiar su consumo privado c, de tal forma que su conjunto presupuestal es $c \leq y - \tau$. Las preferencias son heterogéneas y pueden representarse por la siguiente función de utilidad: $u_i = ln(c) + i \times ln(g)$, donde $0 \leq i \leq 1$, con función de distribución acumulada $F(i)$ continua.

1.1. ¿Es aplicable algún teorema del votante mediano en este ejemplo? Explique.
1.2. ¿Cuál será la política ganadora en una votación por la regla de la mayoría?

2. (1 punto) Considere una ciudadanía que tiene que votar sobre la política q. El votante i tiene utilidad $u_i = -(q - q_i)^2$. La política preferida q_i se distribuye uniforme entre 0 y 1. Hay dos políticos oportunistas cuyo único objetivo es ganar la elección. ¿Qué plataformas propondrán estos políticos? ¿Qué política será la resultante del equilibrio político?

3. (1 punto) Un gobierno tiene la siguiente función de pérdidas cuasi lineal: $G(s_t, e_t) = E[s_t - e_t - s_G - \varepsilon_t + a(e_t - e_{t-1})^2]$. El significado de las letras es el usado en clase. Se cumple que $E[\varepsilon_t] = 0$ y $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$. Hay una central sindical que fija el salario nominal con una meta de salario real s_U. Determine la política óptima del gobierno bajo discreción.

4. (1 punto) Considere el modelo de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3) con información imperfecta. Los ciudadanos observan directamente el tipo del político con probabilidad 0,5 ($\tau = 0{,}5$) y nunca observan si la política se adecua al estado de la naturaleza ($\chi = 0$). Otros parámetros del modelo adoptan los siguientes valores:

$$E = 10\ ;\ \Delta = 1\ ;\ \beta = 0{,}5\ ;\ \pi = 0{,}5$$

Las rentas que puede extraer el político son aleatorias: se distribuyen en forma uniforme entre 10 y 20. En otras palabras, $r \in [10{,}20]$ y la densidad es constante en ese rango de rentas y es cero para cualquier otro rango.
4.1. Caracterice el equilibrio. Es agrupador, separador o semi-separador?
4.2. Determine la probabilidad de que el político disonante elija $e_1 = s_1$.
4.3. Aprenden los ciudadanos a lo largo del juego? Cuál es la probabilidad que asignan a que el incumbente sea congruente antes y después de la acción del incumbente? Explique.

Pauta de respuesta

1. Los ciudadanos de un país tienen que votar sobre el tamaño de un programa público. El servicio brindado a cada individuo es g y el gobierno lo financia con un impuesto de suma fija, igual para todos los individuos: $\tau = g$. Todos los ciudadanos tienen el mismo ingreso bruto y y disponible $y - \tau$, que utilizan para financiar su consumo privado c, de tal forma que su conjunto presupuestal es $c \leq y - \tau$. Las preferencias son heterogéneas y pueden representarse por la siguiente función de utilidad: $u_i = ln(c) + i \times ln(g)$, donde $0 \leq i \leq 1$, con función de distribución acumulada $F(i)$ continua.

1.1. ¿Es aplicable algún teorema del votante mediano en este ejemplo? Explique.

La función de preferencias de política cumple (i) la propiedad de un solo pico, (ii) la propiedad de un solo cruce y (iii) las preferencias intermedias. Por lo tanto, se puede aplicar cualquiera de los teoremas del votante mediano que se asocian a estas propiedades.

Primero determinamos la función de preferencias de política. Es inmediato que la restricción presupuestal de los ciudadanos es operativa: $c = y - \tau$. Sustituyendo esta igualdad y la restricción presupuestal del gobierno en la función de utilidad de los ciudadanos obtenemos las funciones de preferencia de políticas:

$$w_i(g) = ln(y - g) + i\, ln(g) \tag{1}$$

a) Propiedad de un solo pico.

La política óptima para el ciudadano i resulta de resolver el siguiente programa:

$$\max_g w_i(g)$$

La utilidad marginal del gasto público para el ciudadano i es

$$w_i{}'(g) = -\frac{1}{y - g} + \frac{i}{g}$$

La utilidad marginal es decreciente:

$$w_i{}''(g) = -\frac{1}{(y - g)^2} - \frac{i}{(g)^2} < 0$$

Por lo tanto, habrá un óptimo interior determinado por la condición de primer orden $w_i{}'(g_i) = 0$ y la utilidad será creciente en g para valores de g menores a g_i y decreciente para valores de g mayores a g_i. Por lo tanto, se cumple la propiedad de un solo pico:

$$g' < g'' < g_i \rightarrow w_i(g') < w_i(g'')$$
$$g' > g'' > g_i \rightarrow w_i(g') < w_i(g'')$$

b) Propiedad de un solo cruce.

Para verificar que se cumple esta propiedad, debemos verificar que

$$w_i(g) - w_i(g') \geq 0 \ \Rightarrow w_{i'}(g) - w_{i'}(g') \geq 0, si\ g > g'\ y\ i' > i\ o\ g < g'\ y\ i' < i$$

Usando la ecuación (1)

$$w_i(g) - w_i(g') = ln\left(\frac{y-g}{y-g'}\right) + i\ ln\left(\frac{g}{g'}\right)$$

$$w_{i'}(g) - w_{i'}(g') = ln\left(\frac{y-g}{y-g'}\right) + i'\ ln\left(\frac{g}{g'}\right)$$

Lo cual implica que

$$w_{i'}(g) - w_{i'}(g') = w_i(g) - w_i(g') + \ (i' - i)\ ln\left(\frac{g}{g'}\right)$$

Y como $w_i(g) - w_i(g') \geq 0$

$$w_{i'}(g) - w_{i'}(g') \geq \ (i' - i)\ ln\left(\frac{g}{g'}\right) > 0, si\ g > g'\ y\ i' > i\ o\ g < g'\ y\ i' < i$$

c) Preferencias intermedias

Es inmediato que la función de preferencias de política (1) satisface la condición de preferencias intermedias.

1.2. ¿Cuál será la política ganadora en una votación por la regla de la mayoría?

El teorema del votante mediano implica que la política ganadora será la preferida por el votante mediano.

La condición de primer orden $w_i'(g_i) = 0$ implica que el valor óptimo del gasto público para el individuo i es g_i que satisface la siguiente ecuación:[1]

$$\frac{1}{y - g_i} = \frac{i}{g_i}$$

[1] La solución es interior ya que, como vimos, $w_i''(g) < 0$.

Y ordenando términos:

$$g_i = \frac{iY}{1+i}$$

La política preferida es creciente en i:

$$g_i{}' = \frac{Y}{(1+i)^2} > 0$$

Por lo tanto, el individuo mediano en i, determinado por la condición $F(m) = 0{,}5$, es también el mediano en g_i. Se concluye entonces que la política ganadora es

$$g_m = \frac{mY}{1+m}$$

2. Considere una ciudadanía que tiene que votar sobre la política q. El votante i tiene utilidad $u_i = -(q - q_i)^2$. La política preferida q_i se distribuye uniforme entre 0 y 1. Hay dos políticos oportunistas cuyo único objetivo es ganar la elección. ¿Qué plataformas propondrán estos políticos? ¿Qué política será la resultante del equilibrio político?

Esta función de utilidad cumple con la condición de un solo pico, por lo que podemos apelar al teorema de votante mediano correspondiente. El votante mediano tiene la política preferida $q_m = 0{,}5$. La probabilidad de que gane el político A es

$$P_A = \begin{cases} 0, & si\ -(q_A - q_m)^2 < -(q_B - q_m)^2 \\ 1/2, & si\ -(q_A - q_m)^2 = -(q_B - q_m)^2 \\ 1, & si\ -(q_A - q_m)^2 > -(q_B - q_m)^2 \end{cases}$$

Ambos políticos tienen máximos incentivos a favorecer al votante mediano. Eligiendo $q_A = q_m$, el político A gana con probabilidad 0,5 si el político B elige lo mismo y 1 si no lo hace. Si elige cualquier otra política, el político B puede elegir una política más cercana al punto preferido por el votante mediano y entonces A no gana la elección. Es análogo para B. Por lo tanto, en el equilibrio $q_A = q_B = 0{,}5$.

3. (1 punto) Un gobierno tiene la siguiente función de pérdidas cuasi lineal: $G(s_t, e_t) = E[s_t - e_t - s_G - \varepsilon_t + a(e_t - e_{t-1})^2]$. El significado de las letras es el usado en clase. Se cumple que $E[\varepsilon_t] = 0$ y $E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2$. Hay una central sindical que fija el salario nominal con una meta de salario real s_U. Determine la política óptima del gobierno bajo discreción.

El gobierno es el último en jugar. Cuando le toca decidir, el salario nominal es ya una constante. El gobierno resuelve el siguiente programa:

$$\min_{\overline{\kappa},\kappa} E[s_t - e_t - s_G - \varepsilon_t + a(e_t - e_{t-1})^2]$$

$$\text{Sujeto a:}\quad e_t - e_{t-1} = \bar{\kappa} + \kappa\varepsilon_t; s_t = constante$$

Sustituyendo y usando que $E[\varepsilon_t] = 0$, reescribo el programa como:

$$\min_{\bar{\kappa},\kappa} s_t - e_{t-1} - \bar{\kappa} - s_G + E[a(\bar{\kappa} + \kappa\varepsilon_t)^2]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$-1 + E[2a(\bar{\kappa} + \kappa\varepsilon_t)] = 0 \quad \Rightarrow \bar{\kappa} = 1/2a$$

$$E[2a(\bar{\kappa} + \kappa\varepsilon_t)\varepsilon_t] = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 0$$

En resumen, la política discrecional óptima del gobierno en este caso es

$$e_t - e_{t-1} = \frac{1}{2a}$$

Este resultado implica que el gobierno no estabiliza el sector real en este caso. Sus preferencias lineales en la dimensión real implican que no le preocupan las fluctuaciones del sector real de la economía.

4. (1 punto) Considere el modelo de agencia política que presenta Besley (2005, cap 3) con información imperfecta. Los ciudadanos observan directamente el tipo del político con probabilidad 0,5 ($\tau = 0{,}5$) y nunca observan si la política se adecua al estado de la naturaleza ($\chi = 0$). Otros parámetros del modelo adoptan los siguientes valores:

$$E = 10\ ;\ \Delta = 1\ ;\ \beta = 0{,}5\ ;\ \pi = 0{,}5$$

Las rentas que puede extraer el político son aleatorias: se distribuyen en forma uniforme entre 10 y 20. En otras palabras, $r \in [10{,}20]$ y la densidad es constante en ese rango de rentas y es cero para cualquier otro rango.

4.1. Caracterice el equilibrio. Es agrupador, separador o semi-separador?

El votante no observa la acción del político y, por lo tanto, la reelección no depende de esta acción. Esto implica que la elección no aporta ningún incentivo al disciplinamiento de los disonantes. El votante puede observar directamente si un político es disonante o congruente con probabilidad $\tau = 0{,}5$. Si observa el tipo, reelige si es congruente y no reelige si es disonante. Si no observa el tipo, el votante es estrictamente indiferente entre reelegir al incumbente o elegir al desafiante y, por lo tanto, cualquier estrategia del votante $p \in [0{,}1]$, donde p es la probabilidad de reelegir al incumbente, forma parte del conjunto de mejores respuestas del votante si llega a la elección sin haber observado el tipo directamente.

Los disonantes nunca se disciplinan en el primer período, ya que la probabilidad de reelección es independiente de su acción. El congruente elige $e_1 = s_1$ y el disonante elige $e_1 \neq s_1$. Como siempre, en el segundo período el congruente elige $e_2 = s_2$ y el disonante elige $e_2 \neq s_2$.

Al inicio, el votante asigna una probabilidad 0,5 a que el incumbente sea congruente. En el correr del primer período puede o no revelarse el tipo directamente. Si se revela, esa probabilidad inicial se actualiza a 0 y 1, dependiendo de si el incumbente es disonante o congruente, respectivamente. Si no se revela el tipo directamente, entonces el votante sigue asignando una probabilidad 0,5 a que el incumbente sea congruente.

Las estrategias y creencias descritas implican que los dos tipos de políticos se separan.

Nota: hablar de equilibrios agrupadores, separadores y semi-separadores en este ejemplo involucra un cierto “abuso de lenguaje”, ya que si la acción del incumbente es inobservable, no estamos ante un juego de señalización. Sin perjuicio de esta aclaración, los políticos toman acciones distintas en el primer período en este ejercicio y, en este sentido, hay una separación.

4.2. Determine la probabilidad de que el político disonante elija $e_1 = s_1$.

La probabilidad de que el disonante elija $e_1 = s_1$ es 0 en este ejemplo. Como vimos en 4.1, la probabilidad de reelección es independiente de la acción del incumbente y, por lo tanto, un disonante no tiene ningún incentivo a disciplinarse.

4.3. Aprenden los ciudadanos a lo largo del juego? Cuál es la probabilidad que asignan a que el incumbente sea congruente antes y después de la acción del incumbente? Explique.

Los votantes asignan probabilidad π a que el incumbente sea congruente antes y después de que el incumbente actúa. En este sentido, los votantes no aprenden. No obstante, pueden aprender si se revela directamente el tipo del político, cosa que ocurre con probabilidad $\tau = 0{,}5$. Naturalmente que al final del juego, como siempre, se enteran de la identidad del político elegido para el segundo período.