Tema 2: Estrategias Mixtas

Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2024

Estrategias mixtas

Ahora permitimos que las elecciones de los jugadores sean no deterministas, y por lo tanto:

- Necesitamos añadir a los primitivas del modelo una especificación de la relación de preferencia de cada jugador sobre loterías en A.

Asumimos que la relación de preferencia de cada jugador i satisface los supuestos de von Neumann y Morgenstern:

- Así, nuestro modelo básico de interacción estratégica en este capítulo es un juego: $\langle N, (A_i)_i, (u_i)_i \rangle$ que difiere de un juego estratégico como lo definimos anteriormente en que $u_i : A \to \mathbb{R}$ para cada $i \in N$ es una función cuyo valor esperado representa las preferencias del jugador i sobre el conjunto de loterías en A.

Estrategias mixtas

Definition

Sea un juego en forma estratégica $\langle N, (A_i)_i, (u_i)_i \rangle$. Supongamos A_i es finito para cada $i \in N$.

Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras A_i. Denotamos como:

$$\Delta(A_i) = \left\{ \sigma_i = (\sigma_i(a_i))_{a_i \in A_i} \in \mathbb{R}^{A_i} \mid \sigma_i(a_i) \geq 0 \ \forall a_i \in A_i \text{ y } \sum_{a_i \in A_i} \sigma(a_i) = 1 \right\},$$

al conjunto de estrategias mixtas del jugador i.

Notación: $\sigma_i \in \Delta(A_i)$.

Juego extendido

¿Cómo calculamos los pagos de cada jugador en un perfil de estrategias mixtas?

		2	
		C	D
1	A	3,1	6,4
	B	4,5	1,1

$\sigma = [(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})]$.

Queremos: $U_1(\sigma)$ y $U_2(\sigma)$,

Juego extendido

Definition

Sea un juego en forma estratégica $G = \langle N, (A_i)_i, (u_i)_i \rangle$. Supongamos A_i es finito para cada $i \in N$.

La extensión del juego G es el juego $\Gamma = \langle N, (\Delta(A_i))_i, (U_i)_i \rangle$, donde U está definida de la siguiente forma. Dada $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$,

$$U_i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma[u_i(a)] = \sum_{(a_1,\ldots,a_N)\in A} u_i(a_1, \ldots, a_n)\sigma_1(a_1)\ldots\sigma_n(a_n)$$

Definition

Un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de G es un equilibrio de Nash del juego extendido Γ.

Lemma

Dado un perfil de estrategias mixtas $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in \triangle(A_1) \times .... \times \triangle(A_n)$*. Se tiene que:*

$$U_i(\sigma) = \sum_{a_i \in A_i} \sigma(a_i) U_i(a_i, \sigma_{-i}).$$

Notar que la estrategia pura $a_i \in A_i$ la podemos identificar con la estrategia mixta: $\sigma_i(a_i) = 1$ y $\sigma_i(\tilde{a}_i) = 0 \ \forall \tilde{a}_i \neq a_i$ (llamada estrategia "degenerada"). Por tanto $A_i \subseteq \triangle(A_i)$.

Remark

Un EN en estrategias mixtas de Γ en el cual cada jugador juegue una estrategia mixta degenerada, es un EN en el juego original G.

Proposition

Un EN en estrategias puras de G es un EN del juego extendido Γ.

Demostración.

? $\square$

Mensaje: No perdemos equilibrios.

Principio de indiferencia

Notar que $U_i(\sigma)$ es multilineal en las probabilidades: dada una estrategia mixta σ, dos estrategias mixtas de i: α_i y β_i, y un número $\lambda \in [0,1]$, se tiene que:

$$U_i(\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i, \sigma_{-i}) = \lambda U_i(\alpha_i, \sigma_{-i}) + (1-\lambda)U_i(\beta_i, \sigma_{-i}).$$

Proposition

Sea σ^* un EN en mixtas y a_i, $\hat{a}_i$ dos estrategias puras del jugador i tales que $\sigma_i^*(a_i) > 0$ y $\sigma_i^*(\hat{a}_i) > 0$. Entonces:

$$U_i(a_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(\hat{a}_i, \sigma_{-i}^*).$$

Resultado para calcular EN en mixtas

Proposition

σ^* es un EN de Γ si y sólo si:

1. $U_i(a_i, \sigma^*_{-i}) = U_i(\hat{a}_i, \sigma^*_{-i})$ para toda a_i y $\hat{a}_i$ en el soporte de σ^*_i ($\sigma^*(a_i) > 0$ y $\sigma^*(\hat{a}_i) > 0$), y
2. $U_i(a_i, \sigma^*_{-i}) \geq U_i(a'_i, \sigma^*_{-i})$ para toda a_i en el soporte de σ^*_i y $a'_i \in A_i$.

Demostración.

$\square$

Ejemplo: BoS

		2	
		Bach	Stravinsky
1	Bach	2,1	0,0
	Stravisnky	0,0	1,2

¿Cómo son los EN en mixtas del juego?

IESDS y Estrategias Mixtas

Proposition

Sea G un juego en forma estratégica, en el cual todos los conjuntos A_i son finitos. Si una estrategia $b_i \in A_i$ está estrictamente dominada por un estrategia mixta $z_i = (z_i(a_i))_{a_i \in A_i}$, entonces en todo EN del juego, b_i es jugada con probabilidad 0.

Demostración.

Sea $\hat{\sigma}$ un perfil de estrategias mixta tal que $\hat{\sigma}_i(b_i) > 0$. Vamos a mostrar $\hat{\sigma}$ no puede ser un EN, probando que $\hat{\sigma}_i$ no es una mejor respuesta a $\hat{\sigma}_{-i}$. Considere la estrategia mixta $x_i = (x_i(a_i))_{a_i \in A_i}$ tal que:

$$x_i(a_i) = \begin{cases} \hat{\sigma}_i(b_i) z_i(b_i) & \text{si } a_i = b_i \\ \hat{\sigma}_i(a_i) + \hat{\sigma}_i(b_i) z_i(a_i) & \text{si } a_i \neq b_i \end{cases}$$

Probar que:

$$U_i(\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{-i}) < U_i(x_i, \hat{\sigma}_{-i}).$$

□

IESDS y Estrategias Mixtas

Entonces, usando similares argumentos de la proposición de IESDS y EN vista antes, podemos eliminar b_i para computar los EN de G.

Proposition

Sea G un juego, y $b_i \in A_i$ una estrategia estrictamente dominada en la extensión de G. Sea $\tilde{G}$ el juego que se obtiene al remover b_i de G. Entonces el conjunto de EN en estrategias mixtas de G y de $\tilde{G}$ coinciden.

Remark

Útil: una estrategia pura puede no estar dominada por otra pura pero sí por una mixta.

Ejemplo?

Ejemplo: Equilibrio simétrico en mixtas

Un juego es simétrico si $\forall i, j \in N$, $A_i = A_j$ y $u_i(a_i, a_{-i}) = u_j(a_i, a_{-i})$ $\forall a_{-i}$.

Nash (1951) moestró que todo juego simétrico finito (finitas acciones) tiene un equilibrio de Nash simétrico (todos usan la misma estrategia) en estrategias mixtas.

Ejemplo: Hay tres empresas que están considerando entrar en un nuevo mercado. El pago por cada empresa que ingresa es de $150/n$ donde n es el número de empresas que ingresan. El costo de la entrada es de 62. Si no entran obtienen un pago de cero.

- Encuentre los EN en estrategias puras.
- Encuentre el equilibrio simétrico en estrategias mixtas donde las tres empresas entran con la misma probabilidad.

Ejemplo: Guessing right

Los jugadores 1 y 2 eligen cada uno un miembro del conjunto $\{1, .., K\}$. Si los jugadores eligen el mismo número, el jugador 2 paga $\$1$ al jugador 1; de lo contrario no se realiza ningún pago.

Encuentre los equilibrio de Nash del juego.

Estrategias continuas

Definition

Sea A_i un intervalo: $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$. Una estrategia mixta para i es una distribución de probabilidad $F_i : A_i \rightarrow [0,1]$, donde $F_i(x) = Pr\{a_i \leq x\}$. Si $F_i(.)$ es diferenciable con densidad $f_i(.)$, decimos que $a_i \in A_i$ está en el soporte de $F_i(.)$ si $f_i(a_i) > 0$.

Si el jugador 1 está jugando a_1 y sus oponentes usan estrategias mixtas con densidades $f_j(.)$, el pago esperado de 1 es:

$$\int_{\underline{a}_2}^{\overline{a}_2} \int_{\underline{a}_3}^{\overline{a}_3} ... \int_{\underline{a}_n}^{\overline{a}_n} u_1(a_1, a_{-1}) f_2(a_2) f_3(a_3) ... f_n(a_n) da_2 da_3 ... da_n$$

Ejemplo: All-pay-auctions

Dos jugadores pueden apostar por un objeto que valoran en v.

Cada uno puede enviar una oferta. La persona con la oferta más alta obtiene el objeto, pero ambos jugadores tienen que pagar sus ofertas sin importar si obtienen el objeto (por eso el nombre de la subasta). Si hay un empate, ambos pagan y el obejeto se concede a cada jugador con probabilidad de 0.5.

Hallar los pagos y un EN

Existencia del EN

Theorem (Nash, 1949)

Todo juego con un número finito de jugadores y en el que cada jugador tiene un número finito de estrategias puras, tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Existencia del EN

EQUILIBRIUM POINTS IN N-PERSON GAMES

BY JOHN F. NASH, JR.*

PRINCETON UNIVERSITY

Communicated by S. Lefschetz, November 16, 1949

One may define a concept of an n-person game in which each player has a finite set of pure strategies and in which a definite set of payments to the n players corresponds to each n-tuple of pure strategies, one strategy being taken for each player. For mixed strategies, which are probability distributions over the pure strategies, the pay-off functions are the expectations of the players, thus becoming polylinear forms in the probabilities with which the various players play their various pure strategies.

$\hookrightarrow$

Existencia - Prueba

Any n-tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the n strategy spaces of the players. One such n-tuple counters another if the strategy of each player in the countering n-tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered n-tuple. A self-countering n-tuple is called an equilibrium point.

The correspondence of each n-tuple with its set of countering n-tuples gives a one-to-many mapping of the product space into itself. From the definition of countering we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. The closedness is equivalent to saying: if $P_1, P_2, \ldots$ and $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ are sequences of points in the product space where $Q_n \to Q$, $P_n \to P$ and Q_n counters P_n then Q counters P.

Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem[1] that the mapping has a fixed point (i.e., point contained in its image). Hence there is an equilibrium point.

In the two-person zero-sum case the "main theorem"[2] and the existence of an equilibrium point are equivalent. In this case any two equilibrium points lead to the same expectations for the players, but this need not occur in general.

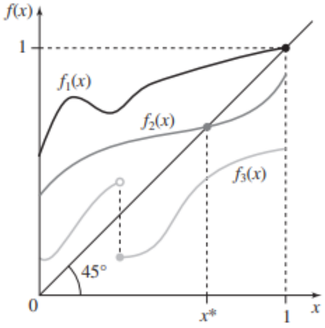
* The author is indebted to Dr. David Gale for suggesting the use of Kakutani's theorem to simplify the proof and to the A. E. C. for financial support.

[1] Kakutani, S., *Duke Math. J.*, **8**, 457–459 (1941).

Intuición de la prueba - Punto fijo

Theorem (Brouwer punto fijo)

Sea $f(x)$ una función continua con dominio $[0,1]$ sobre $[0,1]$, entonces existe al menos un $x^* \in [0,1]$ tal que $f(x^*) = x^*$



Intuición de la prueba - Punto fijo

Definition

La coleccion de funciones de mejores respuesta $BR : \triangle(A) \rightrightarrows \triangle(A)$, se define como $BR = BR_1 \times ... \times BR_n$. Toma cada elemento de $\sigma \in \triangle(A) = \triangle(A_1) \times \triangle(A)_2 \times ...$ y los convierte en el subconjunto $BR(\sigma) \subset \triangle(A)$.

Remark

Notar que un perfil $\sigma^* \in \triangle(A)$ es un equilibrio de Nash si y sólo si es un punto fijo de BR, es decir: $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$.

Kakutani

Theorem (Kakutani punto fijo)

Una correspondecia $C : X \rightrightarrows X$ *tiene un punto fijo si: (1)* X *es un conjunto no vacio, compacto y convexo de* $\mathbb{R}^n$*; (2)* $C(x)$ *es no vacia* $\forall x$*; (3)* $C(x)$ *es convexa* $\forall x$*; (4)* C *tiene un gráfico cerrado.*

A long time ago, the Japanese mathematician Kakutani asked me why so many economists had attended the lecture he had just given. When I told him that he was famous because of the Kakutani fixed-point theorem, he replied, 'What is the Kakutani fixed-point theorem?' (Ken Binmore, Playing for Real, 2007)

Existencia - acciones infinitas

Theorem (Glicksberg)

Sea un juego en forma estratégica $G = \langle N, (A_i)_i, (u_i)_i \rangle$ *donde* $N = \{1, ..., n\}$ *es finito. Si:*

1. $\forall i \in N$, A_i *es un conjunto convexo, compacto de un espacio euclideano.*
2. $\forall i \in N$, u_i *es continua.*
3. $\forall i \in N$, *y* $\forall a_{-i} \in A_{-i}$, $\tilde{u}_i : A_i \to \mathbb{R} / \tilde{u}_i = u_i(a_i, a_{-i})$ *es cuasicóncava.*

Entonces, un EN existe en G.

Interpretación de estrategias mixtas

1. Estrategias mixtas como objetos de elección
   - Hay casos en los que los jugadores introducen aleatoriedad en su comportamiento. Por ejemplo: los gobiernos auditan de forma aleatoria a los contribuyentes, penales en fútbol...
2. Equilibrio en estrategia mixta como un estado estacionario estocástico:
   - Los jugadores tienen información sobre las frecuencias con las que se tomaron las acciones en el pasado, cada jugador usa estas frecuencias para formar su creencia sobre el comportamiento futuro de los otros jugadores, y por lo tanto formular su acción. En equilibrio, estas frecuencias permanecen constantes con el tiempo y son estables en el sentido de que cualquier acción tomada con probabilidad positiva por un jugador es óptima dada las creencias del estado estacionario.
3. Estrategias mixtas como creencias
   - Un EN en mixtas es un perfil σ de creencias, en el que σ_i es la creencia común de todos los otros jugadores sobre las acciones del jugador i, con la propiedad de que para cada jugador i cada acción en el soporte de σ_i es óptima dado σ_{-i}. Bajo esta interpretación, cada jugador elige una sola acción en lugar de una estrategia mixta. Un equilibrio es un estado estable de las creencias de los jugadores, no de sus acciones.