Tema 6: Juegos Repetidos

Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2023

Juegos Repetidos Finitos

Definition

Dado un stage-game G, $G(T, \delta)$ denota el juego repetido finito en el cual el stage-game G se juega por T períodos consecutivos, con un factor de descuento común δ.

Proposition

Si el stage-game de un juego repetido finito tiene un único equilibrio de Nash, entonces el juego repetido finito $G(T, \delta)$ tiene un único equilibrio de Nash perfecto por subjuegos.

Juegos Repetidos infinitos

Consideramos el stage-game G y denotamos como $G(\delta)$ el juego en el cual G se juega infinitas veces ($T = \infty$).

Definition

Dado $\delta \in (0,1)$ el valor presente de una sucesión infinita de pagos $\{v_i^t\}_{t=1}^{\infty}$ del jugador i está definido por:

$$v_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} v_i^t.$$

Definimos el pago promedio como:

$$\bar{v}_i = (1-\delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} v_i^t.$$

Observar el pago promedio de $(v, v \ldots, v)$ es v.

Estrategias

Una **historia** es una sucesión de perfiles de acciones que los jugadores han elegido hasta el período que está en consideración.

Notación: Sea $\mathcal{H}_t$ el conjunto de toas las posibles historias de duración t. Un elemento genérico lo dentamos como $h_t \in \mathcal{H}_t$.

Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las posibles historias: $\mathcal{H} = \cup_{t=1}^{\infty} \mathcal{H}_t$.

Definition

Un estrategia pura es una función $s_i : \mathcal{H} \to A_i$, siendo A_i el conjuntos de acciones del jugador i en el stage-game. Una behavioral strategy de i es una función $\sigma_i : \mathcal{H} \to \triangle(S_i)$.

Definition

Un perfil de estrategias $(s_1^*(.), \ldots, s_n^*(.))$, con $s_i : \mathcal{H} \to A_i$ para todo $i \in N$, es un SPE si la restricción de $(s_1^*(.), \ldots, s_n^*(.))$ es un equilibrio de Nash en todo subjuego. (Similar para $(\sigma_1^*(.), \ldots, \sigma_n^*(.))$)

Equilibrios “Miopes”

Proposition

Sea $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ un EN del stage-game G. Definamos la siguiente “history-independent” estrategia para cada jugador i: $\sigma_i^*(h) = \sigma_i^*$ para toda historia $h \in \mathcal{H}$.

Entonces, $(\sigma_1^*(.), \ldots, \sigma_n^*(.))$ es un SPE de $G(\delta)$, para todo $\delta < 1$.

Ejemplo

			J2	
			m	f
J1	M		2,2	0,3
	F		3,0	1,1

Hallar EN de G. Hallar los SPE de $G(T, \delta)$.

¿Podemos hacerlo "mejor" si consideramos $G(\delta)$?

Consideremos las siguientes estrategias:

Ejemplo: estrategias grimm-trigger

		J2	
		m	f
J1	M	2,2	0,3
	F	3,0	1,1

La idea es cartigar al otro para siempre si no coopera.

Estrategia grimm-trigger para el **J1**:

1. En el primer período jugar M.
2. Para cada período $t > 1$ jugar M si la historia hasta ese momento consiste en que J2 jugó siempre m:

$$s_1^t(h_{t-1}) = M \iff h_{t-1} = \{(.,m), \ldots, (.,m)\}.$$

De lo contrario: jugar F:

$$s_1^t(h_{t-1}) = F$$

.

Ejemplo: estrategias grimm-trigger

Estrategia grimm-trigger para el **J2**:

1. En el primer período jugar m.
2. Para cada período $t > 1$ jugar m si la historia hasta ese momento consiste en que J1 jugó siempre M::

$$s_2^t(h_{t-1}) = m \iff h_{t-1} = \{(M,.),\ldots,(M,.)\}.$$

De lo contrario: jugar f:

$$s_2^t(H_{t-1}) = f$$

Hallar los valores de δ para los cuales el perfil anterior es un EN. ¿Es este perfil un SPE?

One-shot deviation

Definition

Una *sola desviación (one-shot deviation)* del jugador i de una estrategia σ_i es una estrategia $\hat{\sigma}_i \neq \sigma_i$ con la propiedad de que existe una única historia $\tilde{h}^t \in \mathcal{H}$ tal que $\forall h^\tau \neq \tilde{h}^t$, $\sigma_i(h^\tau) = \tilde{\sigma}_i(h^\tau)$.

Observar que aunque la diferencia sea en una sola historia, el resultado puede ser muy distinto.

Considerar la estrategia gatillo (grim trigger). El resultado de equilibrio es ambos eligen cooperar (M, m) en cada período.

Consideremos la siguiente estrategia para el jugador 1 que constituye una sola desviación. J1 juega como en la estrategia gatillo, con la excepción de jugar F en el período 5 si no hubo antes ningún F o f.

Bajo la estrategia que es una sola desviación, el resultado es (F, f) en cada período después del 7.

One-shot *profitable* deviation

Para una estrategia σ_i, $\sigma_i|\tilde{h}^t$ denota la estrategia inducida por la historia $\tilde{h}^t$. Es decir, $\sigma_i|\tilde{h}^t = \sigma_i(\tilde{h}^t h^\tau)\ \forall\ h^\tau \in \mathcal{H}$, donde $\tilde{h}^t h^\tau$ es la concatenación de la historia h^t seguida de la historia h^τ.

Definition

Fijamos un perfil σ_{-i}. Una sola desviación $\hat{\sigma}_i$ de la estrategia σ_i es "profitable" si $\hat{\sigma}_i$ implica mayores pagos que σ_i en el subjuego que comienza en la historia $\tilde{h}^t$ para la cual $\hat{\sigma}_i(\tilde{h}^t) \neq \sigma_i(\tilde{h}^t)$, es decir:

$$U_i(\hat{\sigma}_i|\tilde{h}^t, \sigma_{-i}|\tilde{h}^t) > U_i(\sigma_i|\tilde{h}^t, \sigma_{-i}|\tilde{h}^t)$$

One-shot deviation principle

Theorem

Si existe B tal que $|u_i(a)| < B \ \forall i \in N, \ \forall a \in A$. Un perfil es un SPE $\iff$ no hay one-shot profitable deviations.

Demostración.

$\Rightarrow$ Inmediato

$\Leftarrow$ $\square$

One-shot deviation principle: volviendo a grimm-trigger

Considere la siguiente variante de la estrategia grimm-trigger para J1:

1. En el primer período jugar M.
2. Para cada período $t > 1$ jugar M si la historia hasta ese momento consiste sólo de (M, m):

$$s_1^t(h_{t-1}) = M \iff h_{t-1} = \{(M, m), \ldots, (M, m)\}.$$

De lo contrario: jugar F:

$$s_1^t(h_{t-1}) = F$$

.

Es decir: juega F luego de las historias en las cuales cualquiera de los dos jugadores jugaron F en algún período.

Asume que J2 juega la misma estrategia.

Probar que en este caso el perfil es un SPE.

One-shot deviation principle: otras estrategias

Considerar las siguientes estrategias donde C =cooperar y D =No-cooperar.

J1 \ J2	C	D
C	2,2	0,3
D	3,0	1,1

1. Tit-for-tat. La duración del castigo depende del comportamiento del otro jugador. Primero fijar C. Si en el período anterior el otro jugador jugó C, jugar C; si jugo D jugar D. (En otras palabra: empezar cooperando, luego copiar lo que hizo el otro en el periodo anterior)
2. Castigo limitado (*limited punishment*). Primero jugar C, y C después de toda historia en la cual cada acción previa del otro jugador fue C. Y si el otro jugador se desvía juega D por k períodos, luego de lo cual vuelve a C.

Ejemplo: Colusión

Consider el caso de un mercado con 2 empresas. Sea G el juego que cada empresa elige la cantidad a producir q_i de forma simultánea. La demanda de mercado es

$$P(Q) = 100 - \sum_{j=1}^{2} q_j,$$

y los costos son $c_i(q_i) = 10q_i$.

Hallar un SPE en $G(\delta)$ en el cual ambas empresa produzcan la cantidad de monopolioen todos los períodos (para algún $\delta < 1$) .

The Folk Theorem

Definition

Sean $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{R}^n$, $v' = (v'_1, \ldots, v'_n) \in \mathcal{R}^n$.

Decimos que $\hat{v} = (\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_n)$ es una combinación convexa de v y v' si existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $\hat{v} = \alpha v + (1 - \alpha) v'$.

Definition

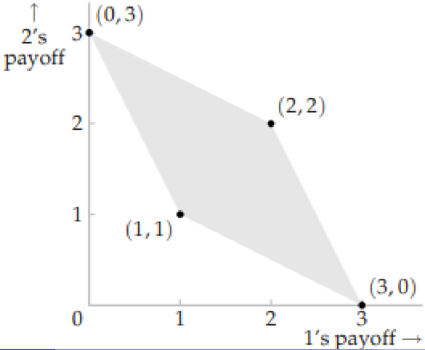
Dado un conjunto $V = \{v^1, \ldots, v^k\} \subset R^n$ la cubierta convexa de V es el conjunto:

$$CoHull(V) = \{v \in \mathcal{R}^n : \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathcal{R}^k_+, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1 \text{ t.q. } v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j\}.$$

The Folk Theorem

		J2	
		C	D
J1	C	2,2	0,3
	D	3,0	1,1

$V = \{(2,2),(3,0),(0,3),(1,1)\}$. Pagos factibles de $G{=}CoHull(V)$:



The Folk Theorem

¿Que pagos se pueden obtener EN $G(\delta)$ como parte de un EN (o SPE)?

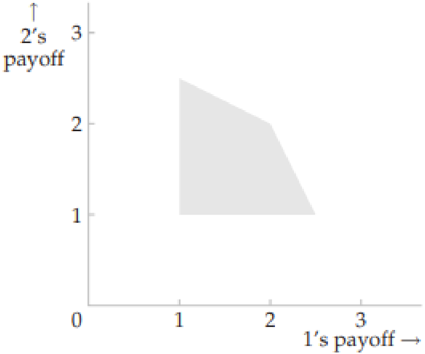
Theorem

Sea G un juego finito de movidas simultáneas y con información completa.

Denotemos como $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ los pagos de un equilibrio de Nash, y sea $(v_1, \ldots, v_n)$ un pago factible de G (esto es, que está en la cubierta convexa generada por el conjunto de vectores de pagos del juego).

Si $v_i > v_i^*, \forall i \in N$, y δ es lo suficientemente cercano a 1, entonces existe un SPE de $G(\delta)$ tal que alcanza un pago promedio arbitrariamente cercano a $(v_1, \ldots, v_n)$.

The Folk Theorem: intuición



	$1 \ldots \ell-1$	ℓ	$\ell+1$	$\ldots$	k	1	$\ldots$	k	1	$\ldots$	k	$\ldots$
s_1	Same outcome	$u_1(a^\ell)$	$u_1(a^{\ell+1})$	$\ldots$	$u_1(a^k)$	Average $> w_1$			Average $> w_1$			$\ldots$
Dev.		v^ℓ	$\leq w_1$	$\ldots$	$\leq w_1$	$\leq w_1$	$\ldots$	$\leq w_1$	$\leq w_1$	$\ldots$	$\leq w_1$	$\ldots$

The Folk Theorem: Ejemplo

Muestre un SPE en $G(\delta)$ que alcance el pago de $(2, 2)$ en el siguiente G:

		J2	
		C	D
J1	C	4,4	-1,5
	D	5,-1	1,1