Tema 7: Juegos con Información Incompleta

Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2023

Juegos Bayesianos Estáticos

Ejemplo. Juego de Bach o Stravinsky, pero ahora J1 no está seguro se el otro jugador quiere ir con él o evitarlo. Sabe que:

Con Prob=$\frac{1}{2}$.

		2: B	2: S
1	B	2,1	0,0
	S	0,0	1,2

Con Prob=$\frac{1}{2}$.

		2: B	2: S
1	B	2,0	0,2
	S	0,1	1,0

$J2$ Sabe lo que quiere.

Ejemplo

Calculemos los pagos esperados del J1.

		2 (B,B)	(B,S)	(S,B)	(S,S)
1	B				
	S				

Ejemplo

Calculemos los pagos esperados del J1.

		2			
		(B,B)	(B,S)	(S,B)	(S,S)
1	B				
	S				

Entonces: $(B, (B, S))$ es el único BNE en estrategias puras.

Definición

Definition

Un juego Bayesiano estático (con información incompleta) está definido por

$$\langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\Theta_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot, \theta_i); \theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n \rangle,$$

1. $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de jugadores.
2. A_i es el conjunto de acciones del jugador i.
3. $\Theta_i = \{\theta_{1i}, \ldots, \theta_{1k_i}\}$ es el conjunto de tipos posibles (espacio de tipos) del jugador i.
4. $v_i : A \times \Theta_i \to \mathcal{R}$ es la función de pagos del jugador i, con $A = A_1 \times \ldots \times A_n$.
5. ϕ_i son las creencias (beliefs) del jugador i con respecto a la incertidumbre de los tipos de los otros jugadores, con $\phi_i(\theta_{-i}|\theta_i)$ la (posterior) distribución condicional sobre θ_{-i} dado que i sabe su que su tipo es θ_i.

Definición

Remark

$v_i(\cdot, \theta_i)$ depende de la acción de todos los jugadores, pero sólo del tipo de i (Private Values).

Definition (Estrategia)

Dado un juego Bayesiano, una estrategia pura del jugador i es una función $s_i : \Theta_i \to A_i$ que define una acción pura $s_i(\theta_i)$ para cada tipo del jugador i, θ_i.

Definición

Definition (Equilibrio Bayesiano)

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*(\cdot), \dots, s_n^*(\cdot))$, es un equilibrio Bayesiano de Nash (BNE) en estrategias puras si para cada jugador i, y para cada tipo del jugador i, $\theta_i \in \Theta_i$, y cada acción $a_i \in A_i$, la estrategia $s_i^*(\cdot)$ verifica:

$$\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i}|\theta_i) v_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i) \geq$$

$$\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i}|\theta_i) v_i(a_i, s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i).$$

Observar que lo anterior es equivalente a, $\forall a_i \in A_i$:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}[v_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[v_i(a_i, s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i]$$

Ejemplo 1

Dos personas están envueltas en una pelea. $J1$ no sabe si $J2$ es fuerte o débil. Sí conoce que con probabilidad α es fuerte y con probabilidad $1-\alpha$ es débil. J2 conoce su condición.

Las acciones de cada jugador son pelear o rendirse (rendirse tiene un pago de 0).

Si $J1$ pelea y $J2$ se rinde, recibe un pago de 1.

Si ambos pelean y $J2$ es débil, entonces los pagos son $(1,-1)$.

Si ambos pelean y $J2$ es fuerte, entonces los pagos son $(-1,1)$.

	F	Y
F	$-1,\ 1^*$	$1,\ 0$
Y	$0,\ 1^*$	$0,\ 0$

State: *strong*

	F	Y
F	$1,-1$	$1,\ 0^*$
Y	$0,\ 1^*$	$0,\ 0$

State: *weak*

Hallar un BNE si $\alpha < \frac{1}{2}$ y $\alpha > \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2: Grupo de estudio

Dos estudiantes tienen que hacer una tarea juntos. Cada uno puede ejercer esfuerzo ($e = 1$) o no ($e = 0$). El esfuerzo tiene un costo $c < 1$.

Si al menos uno de los dos estudiantes se esfuerza, la tarea se realiza con éxito. Pero si ninguno se esfuerza, la tarea fracasa.

Cada estudiante tiene un tipo $\theta_i \in [0,1]$, independiente, distribuido uniformemente en $[0,1]$.

(Observar que cada jugador tiene un continuo de tipos. Además $F(\theta_i) = \theta_i$, y $f(\theta_i) = 1$ para todo $\theta_i \in [0,1]$.)

El valor para cada estudiante de que la tarea se haga exitosamente es θ_i^2.

Ejemplo 2: Grupo de estudio

Pagos:

$$u_i(e_i, e_j, \theta_i) = \begin{cases} \theta_i^2 - c & \text{si } e_i = 1 \\ \theta_i^2 & \text{si } e_i = 0, e_j = 1 \\ 0 & \text{si } e_i = e_j = 0 \end{cases}$$

Escribir las estrategias de cada jugador y calcular un BNE.

Selección adversa. George Akerlof (1970)

Mercados competitivos asignan bienes a aquellos que lo valoran más (eficiencia). Supuesto clave: Hay información perfecta.

El J1 tiene un auto y sólo él conoce la calidad. Es de conocimiento común que el auto puede ser de calidad alta, media o baja, con igual probabilidad ($1/3$ cada calidad).

El valor del auto para cada jugador es ($\theta_1 \in \Theta_1 = \{L, M, H\}$):

$$v_1(\theta_1) = \begin{cases} 10 & \text{si } \theta_1 = L \\ 20 & \text{si } \theta_1 = M \\ 30 & \text{si } \theta_1 = H \end{cases}$$

$$v_2(\theta_1) = \begin{cases} 14 & \text{si } \theta_1 = L \\ 24 & \text{si } \theta_1 = M \\ 34 & \text{si } \theta_1 = H \end{cases}$$

Observar que lo más eficiente es que J2 compre el auto.

Comercio ineficiente y selección adversa

Considere el siguiente juego:

J2 hace una *take-it-or-leave-it* oferta, luego de la cual J1 decide si aceptar o rechazar. Si acepta se lleva adelante la transacción, y el juego termina.

Estrategias:

J2 $p \geq 0$.

J1 $s_1 : [0, +\infty] \times \Theta_1 \to \{A, R\}$.

Comercio ineficiente y selección adversa

- ¿Puede ser $p = 20$ parte de un equilibrio?
- ¿Y $p \in [20, 30)$?
- ¿Y $p = 19$?

Proposition

El único auto que se intercambia en equilibrio es de calidad baja. Además, cualquier precio $p^* \in [10, 14]$ puede sostenerse como un BNE.

Caso de common values. El valor del auto para J2 depende del tipo de J1 (θ_1).

Ejemplo 3: Subastas

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de jugadores.

Cada jugador i tiene valoración $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$ con una cdf $F_i(\cdot)$. Las valoraciones son independientes.

Los pagos por no obtener el objeto son cero, y por obtener el objeto $\theta_i - p$ (caso independent private values (IPV)).

Cada jugador conoce su valoración, pero no la del resto. Sí sabe cómo se distribuyen las valoraciones de los otros jugadores.

Una estrategia para el jugador i es: $s_i : [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \to \mathbb{R}_+$, que asigna para cada valoración, una oferta.

Subasta de segundo precio

El jugador que hace la mayor oferta gana, y paga la segunda mayor oferta.

$$v_i(b_i, b_{-i}; \theta_i) = \begin{cases} \theta_i - \text{máx}_{j \neq i}\{b_j\} & \text{si } b_i = \text{máx}_{i \in N}\{b_i\} \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \text{ para algún j} \end{cases}$$

Proposition

En una subasta de segundo precio cada jugador tiene una estrategia débilmente dominante que es ofertar su valoración. Esto es,

$$s_i(\theta_i) = \theta_i \;\; \forall i \in N$$

es un BNE (en estrategias débilmente dominantes).

Subasta de segundo precio

Demostración.

Sea $\overline{b}$ la oferta más alta. Entonces ($v_i = \theta_i$ en las figuras):

		$\overline{b} < b_i$	$b_i = \overline{b}$ (m-way tie)	$b_i < \overline{b} < v_i$	$\overline{b} \geq v_i$
i's bid	$b_i < v_i$	$v_i - \overline{b}$	$(v_i - \overline{b})/m$	0	0
	v_i	$v_i - \overline{b}$	$v_i - \overline{b}$	$v_i - \overline{b}$	0

		$\overline{b} \leq v_i$	$v_i < \overline{b} < b_i$	$b_i = \overline{b}$ (m-way tie)	$\overline{b} > b_i$
i's bid	v_i	$v_i - \overline{b}$	0	0	0
	$b_i > v_i$	$v_i - \overline{b}$	$v_i - \overline{b}$	$(v_i - \overline{b})/m$	0

$\square$

Notar que la subata tiene propiedades deseables: no importa si los jugadores conocen los $F_i()$ de los otros, si están correlacionados los tipos, y es Pareto óptima. Existen otros equilibrios.

Subasta de primer precio

El jugador que hace la mayor oferta gana, y paga su oferta.

$$v_i(b_i, b_{-i}; \theta_i) = \begin{cases} \theta_i - b_i & \text{si } b_i = \max_{i \in N}\{b_i\} \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \text{ para algún j} \end{cases}$$

Notar que $s_i(\theta_i) = \theta_i$ es una estrategia dominada.

Supuesto de la estrategia: Cuanto mayor es la valoración del jugador, mayor es la oferta. Esto es, si $\theta_j' > \theta_j''$, entonces $s_j(\theta_j') > s_j(\theta_j'')$.

Entonces, la estrategia es invertible, y tenemos:

$$Pr\{s_j(\theta_j) < b_i\} = Pr\{\theta_j < s_j^{-1}(b_i)\} = F_j(s_j^{-1}(b_i)).$$

Subasta de primer

Calculamos el pago esperado (usamos independencia):

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}[v_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i] = \prod_{j \neq i} [F_j(s_j^{-1}(b_i))](\theta_i - b_i).$$

Consideramos el caso simétrico: la valoración de cada jugador se distribuye en el mismo intervalo $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$, con $\underline{\theta} > 0$, de acuerdo a la misma cdf F con densidad f.

Buscamos equilibrios simétricos en el que cada jugador usa la misma estrategia: $s : [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \to \mathbb{R}_+$.

Subasta de primer precio

Cada jugador maximiza la siguiente expresión con respecto a b (dado θ):

$$\max_{b \geq 0} \ \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[v_i(b, s^*_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i] = [F(s^{-1}(b))]^{n-1}(\theta - b).$$

Resolvemos...

Subasta de primer precio precio

$$s^*(\theta) = \theta - \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\theta} [F(x)^{n-1}] dx}{[F(\theta)]^{n-1}}.$$

Observar que $s^*(\theta) < \theta$.

En el caso uniforme en $[0,1]$ ($F(x) = x$):

$$s^*(\theta) = \theta - \frac{\theta^n}{n\theta^{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)\theta.$$

Desarrolladores de software

Considere el caso de dos desarrolladores de software que quieren que su sistema sea usado por un productor de computadoras.

Cada desarrollador i ofrece un soborno b_i al fabricante, el cual observa b_1, b_2 y elige el soborno mayor.

Si el soborno es rechazado, el desarrollador recibe 0. El desarrollador cuyo soborno es aceptado lo paga, y se convierte en el monopolista del mercado, enfrentando una demanda $P = 1 - Q$.

El costo marginal del desarrollador i es c_i. Este costo es información privada de cada desarrollador, pero los dos saben que los costos se distribuyen iid de acuerdo a $U[0, 1]$.

Desarrolladores de software

1. Calcular la cantidad que cada desarrollador producirá si se vuelve monopolista, y sus beneficios.
2. Hallar un BNE de la forma:

$$b_i(c_i) = \alpha + \gamma(1 - c_i)^2$$

.

Revenue Equivalence Theorem

Theorem

Dadas siguientes condiciones:

1. *Cada tipo de jugador se extrae de una distribución "bien comportada"* ($F_i()$ *creciente y continua);*
2. *los jugadores son neutrales al riesgo;*
3. *el jugador con el tipo más alto gana;*
4. *el jugador con el menor tipo posible* ($\underline{\theta}$) *tiene un beneficio esperado de cero.*

Cualquier juego de subastas que satisfaga estas cuatro condiciones dará al vendedor el mismo ingreso esperado, y dará a cada tipo de licitador el mismo pago esperado.

Subastas con common values

Suponga que se licita un pozo petrolero que contenie reservas desconocidas. Cada licitador realiza una prueba para estimar las reservas.

El resultado de la prueba de cada licitador le da cierta información sobre la cantidad de las reservas, y por lo tanto su valoración de estas reservas, pero los resultados de las pruebas de los otros licitadores no se conocen.

Suponga que hay dos licitadores, con valoraciónes $\theta_i \sim U[0,1]$ iid. Sus pagos son:

$$v_i(b_i, b_j; \theta_i, \theta_j) = \begin{cases} \alpha\theta_i + \gamma\theta_j - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

Halle un BNE simétrico de la forma $b(\theta_i) = a + c\theta_i$.

Estrategias mixtas como estrategias puras en un juego perturbado

Volviendo a la interpretación de estrategias mixtas: ¿por qué es esperable que los jugadores jueguen una est. mixta con la probabilidad exacta cuando están indiferentes entre sus est. puras?

Veamos una respuesta de Harsanyi (1973) usando juegos bayesianos.

Un juego es visto como una situación frecuente en la que las preferencias de los jugadores están sujetas a pequeñas variaciones aleatorias.

En cada ocurrencia del juego cada jugador conoce sus propias preferencias pero no las de los otros jugadores. Un equilibrio de estrategias mixta es un resumen de las frecuencias con las que los jugadores eligen sus acciones a lo largo del tiempo.

Estrategias mixtas como estrategias puras en un juego perturbado

Sea $G = \langle N, (A_i), (u_i)_i \rangle$ un juego estratégico finito, y $\epsilon = (\epsilon_i(a))_{i \in N, a \in A}$ una colección de variables aleatorias con rango $[-1, 1]$ donde cada $\epsilon_i = \epsilon_i(a)_{a \in A}$ tiene densidad y distribución continuas y diferenciables, y los vectores $(\epsilon_i)_{i \in N}$ son independientes.

Sea $G(\epsilon)$ el juego bayesiano aosciado a G en el cuál los tipos de cada jugador son las posibles realizaciones de sus pagos $u_i(a) + \epsilon_i(a)$. Cada jugador sabiendo la realización suya pero no la de los demás.

El resultado de Harsanyi es que para todo juego G y cualquier colección ϵ^* de variables aleatorias que satisfagan las condiciones anteriores, cualquier equilibrio de Nash en estrategias mixtas de G es un equilibrio de Nash en estrategias puras de $G(\gamma\epsilon^*)$ cuando $\gamma \to 0$

Es decir, cuando las variaciones aleatorias en los pagos son pequeñas, casi cualquier equilibrio mixto del juego G está cerca de un equilibrio puro del juego Bayesiano asociado y viceversa.