Tema 8: Juegos Dinámicos con Información Incompleta

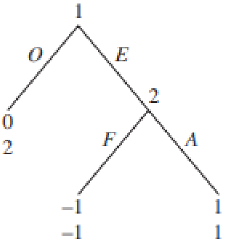
Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2023

El problema de SPE

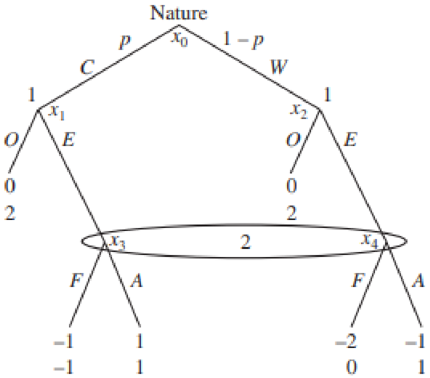
Recordar que el concepto SPE servía para eliminar EN basados en amenazas no creíbles.



	F	A
O	0, 2	0, 2
E	−1, −1	1, 1

El problema de SPE

Ahora el entrante (J1) tiene dos tipos $\theta_1 = \{W, C\}$, débil (W), competitivo (C), con $Pr(\theta_1 = C) = p = 1/2$. J1 sabe su tipo, J2 no sabe θ_1.



Hallar los SPE.

El problema de SPE

Con información incompleta hay un sólo subjuego, y SPE no elimina equilibrios basados en amenazas no creíbles.

Recordar:

Definition

Un subjuego G de un juego de forma extensiva Γ consiste en un sólo nodo y todos sus sucesores, con la propiedad de que si $x \in G$ y $\hat{x} \in h(x)$ entonces $\hat{x} \in G$. El subjuego G es en sí mismo un árbol de juego con sus conjuntos de información y pagos heredados de Γ.

Notar que hay un único subjuego, y por tanto SPE no elimina equilibrio que no satisface racionalidad secuencial..

Equilibrio Bayesiano Perfecto (PBE)

Nuevo Concepto de Solución (Refinamiento) para solucionar este problema.

Necesitamos poder establecer la racionalidad secuencial del jugador dentro de cada uno de sus conjuntos de información, aunque el conjunto de información no sea primer nodo de un subjuego.

Pero para saber cuál es la mejor respuesta en el conjunto de información, necesitamos saber sus creencias sobre donde está:

Clave: Establecer creencias de los jugadores en sus conjuntos de información, y elegir acciones que maximicen sus pagos de acuerdo a esas creencias.

Path de equilibrio

Definition

Sea $\sigma^* = (\sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*)$ un BNE. Un conjunto de información está en el path de equilibrio (on the equilibrium path) si dado σ^* y dado las distribución de los tipos, el conjunto de información es alcanzado con probabilidad positiva.

De lo contrario, si la probabilidad es cero, entonces se dice que está fuera del path de equilibrio (off the equilibrium path).

Creencias

Definition

Un sistema de creencias (beliefs) μ asigna en cada conjunto de información, una función de probabilidad sobre el conjunto de los nodos de decisión en ese conjunto.

Esto es, dado cada conjunto de información $h \in H$ y cada nodo $x \in h$, μ asigna a cada nodo $x \in h$ una probabilidad $\mu(x) \in [0, 1]$, tal que $\sum_{x \in h} \mu(x) = 1$ para todo $h \in H$.

Requerimiento 1

Requerimiento 1: Cada jugador tendrá un sistema de creencias.

¿Qué restricciones vamos a imponer a las creencias?

Una restricción **endógena** dada por las estrategias de los otros jugadores.

Una restricción **exógena** dada por los movimientos de la naturaleza.

Ejemplo.

1. ¿Qué restricciones impone la estrategia EO?
2. Supongamos una estrategia tal que J1 si $\theta_1 = C$ juega E con prob. σ_c y O con prob. $1 - \sigma_c$. Si $\theta_1 = W$ juega E con prob. σ_w y O con prob. $1 - \sigma_w$. ¿Cómo definir $\mu(x_3)$?

Requerimiento 2

Requerimiento 2: Sea $\sigma^* = (\sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*)$ un BNE. En todos los conjuntos de información que están en el path de equilibrio deben ser consistentes con la regla de Bayes.

Requerimiento 3

Requerimiento 3: En todos los conjuntos de información que están fuera del path de equilibrio cualquier sistema de creencias puede ser asignado (la regla de Bayes no aplica).

Requerimiento 4

Requerimiento 4: Dada las creencias de cada jugador, sus estrategias deben ser secuencialmente racionales. Esto es, en cada conjunto de información el jugador jugará una mejor respuesta dada sus creencias. Es decir, que dado μ y estrategias de los oponentes σ_i', en h σ_i debe verificar:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}[v_i(\sigma_i(\theta_i), \sigma_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i, \mu] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[v_i(\sigma_i', \sigma_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i, \mu].$$

Notar que en el perfil (OO, F) el jugador 2 no está jugado una mejor respuesta a **ninguna** creencia. Por lo tanto, no cumple el requirimiento 4.

Equilibrio Bayesiano Perfecto

Definition

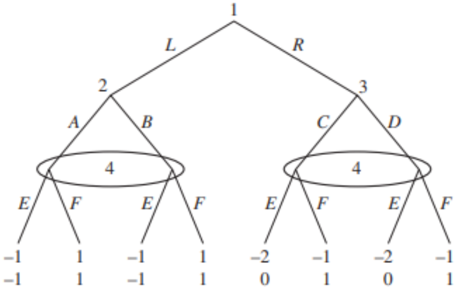
Un equilibrio bayesiano (BNE) $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_1^*)$ con una sistema de creencias μ es un **equilibrio bayesiano perfecto (PBE)** si satisface los requerimiento 1-4.

PBE débil y fuerte

Algunos textos se refieren a este concepto de solución como equilibrio bayesiano perfecto débil.

Vale la pena señalar que un requisito más estricto que el 3 es que las creencias off-the-path de un equilibrio se definan por la regla de Bayes cuando sea posible.

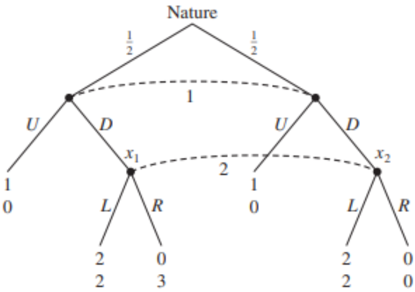
¿Cómo puede ser que la regla de Bayes pueda aplicarse cuando no se alcanza un conjunto de información? Ejemplo: suponga que J1 juega L, y J2 y J3 usan est. mixtas...



Sequential Equilibrium

A veces PBE da soluciones poco razonables por el requisito 3.

Ejemplo:



(D,L) con $\mu_2(x_1) = \mu_2(x_2) = 1/2$ es un PBE.

(U,R) con $\mu_2(x_1) > 2/3$ también es PBE.

Sequential Equilibrium

Definition

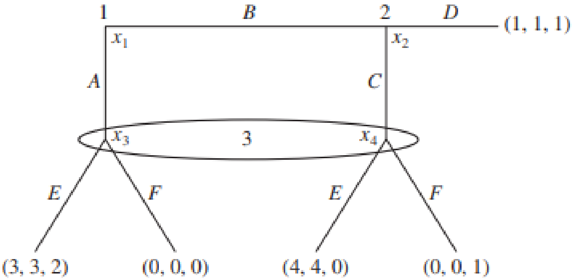
Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ en conjunto con un sistema de creencias μ^* es **consistente** si existe un secuencia de estrategias mixtas no degeneradas, $\{\sigma^k\}_k^\infty$, y una secuencia de creencias derivadas de cada σ^k de acuerdo a la regla de Bayes $\{\mu^k\}_k^\infty$, tal que $lim_{k\to\infty}(\sigma^k, \mu^k) = (\sigma^*, \mu^*)$.

Definition

Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ en conjunto con un sistema de creencias μ^* es un **sequential equilibrium** si (σ^*, μ^*) es un PBE consistente.

Ejemplo: el caballo de Selten

Hallar BNE, ¿cuál es PBE? ¿y SE?



Signaling Games

En los juegos de información incompleta hay al menos un jugador que no está informado sobre el tipo del otro jugador.

En algunos casos seria útil para un jugador revelar sus tipos a sus oponentes.

Por ejemplo, si un potencial rival de una firma o político establecido sabe que es competitivo, puede querer revelar esa información a la firma/político establecido para competir suave....

¿Es posible revelar información creíble en equilibrio?

Signaling Games

Los juegos de señalización comparten una estructura que incluye los siguientes cuatro componentes:

1. La naturaleza elige un tipo para el J1 que el J2 no conoce, pero que le importa (common values).
2. El J1 tiene una acción amplia en el sentido de que hay al menos tantas acciones como tipos, y cada acción impone un costo diferente para cada tipo.
3. El J1 elige una acción primero, y el J2 responde después de observar la elección del J1.
4. Dada la creencia del J2 acerca de la estrategia de J1, el J2 actualiza su creencia después de observar la elección del J1. El J2 luego elige la mejor respuesta a sus creencias actualizadas.

Signaling Games

Estos juegos se llaman juegos de señalización debido a la señal potencial que las acciones del J1 pueden transmitir al J2.

Si en equilibrio cada tipo de J1 está jugando una acción diferente, entonces en el equilibrio la acción del J1 revelará completamente el tipo del J1 al J2.

No tiene porque ser el caso de que el tipo de J1 se revela. Si, por ejemplo, en equilibrio todos los tipos de J1 eligen la misma acción entonces el J2 no puede actualizar sus creenciasal observar la acción.

Signaling Games

Exiten dos clases de equilibrios bayesianos perfectos en estos juegos:

1. **Pooling equilibrium**: todos los tipos de J1 eligen la misma acción, revelando nada al J2. Las creencias del J2 deben derivarse de la regla de Bayes sólo en los conjuntos de información que son alcanzados on-the-path. Todos los otros conjuntos se alcanzan con probabilidad cero, y en estos conjuntos J2 debe tener creencias que respalden su propia estrategia. La estrategia racional secuencial del J2 dada sus creencias es lo que mantiene al J1 incapaz de desviarse de su estrategia.
2. **Separating equilibrium**: cada tipo de J1 elige una acción diferente, revelando así su tipo en equilibrio al jugador J2. Las creencias del jugador 2 están bien definidas por la regla de Bayes en todos los conjuntos de información que se alcanzan con probabilidad positiva. Si hay más acciones que tipos para J1, entonces el J2 debe tener creencias en los conjuntos de información off-the-path (las acciones que ningún tipo de J1 elige), que a su vez debe sustentar la estrategia del J2.

Signaling Games -Ejemplo (Spence)

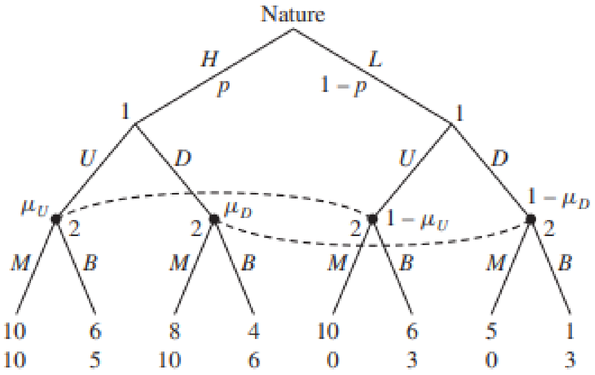
1. La naturaleza elige la habilidad del J1 (productividad en el trabajo), que puede ser alta (H) o baja (L), y sólo el J1 conoce su habilidad. Así, su conjunto de tipos es $\Theta_1 = \{H, L\}$, con $Pr(\theta = H) = \frac{1}{4}$, de conocimiento común.
2. Después de que el J1 aprende su tipo, él puede elegir si obtener un título de MBA (D) o estar satisfecho con su título de grado (U), de modo que $A_1 = \{D, U\}$. Obtener un MBA requiere un esfuerzo que depende del tipo. El J1 incurre en un costo privado si obtiene un MBA, y un costo de 0 si no lo hace. Suponemos que los tipos altamente calificados encuentran más fácil de estudiar, capturados por el supuesto de que $c_H = 2 < 5 = c_L$.
3. El J2 es un empleador, que puede asignar al J1 a uno de los dos puestos: gerente (M) o administrativo (B), de modo que $A_2 = \{M, B\}$. El empleador obtiene un beneficio del proyecto y debe pagar un sueldo al trabajador dependiendo de la asignación del trabajo. El salario de mercado para un gerente es w_M y para un administrativo w_B, donde $w_M = 10 > 6 = w_B$.

Signaling Games -Ejemplo (Spence)

4 El pago final del J2 se determina por la combinación de habilidades y asignaciones de trabajo. Se asume que el título de MBA no añade nada a la productividad. Un trabajador altamente calificado es relativamente mejor en la gestión, mientras que un trabajador con poca calificación es relativamente mejor en el trabajo administrativo. Los beneficios netos del empleador se muestran en el siguiente cuadro:

		Puesto	
		M	B
Habilidad	H	10	5
	L	0	3

Signaling Games -Ejemplo (Spence)



Hallar un PBE separating y uno pooling.

Refinamiento de PBE en signaling games

Ejemplo: consideremos el pooling equilibrium en el que ambos tipos de trabajadores eligen U, y luego el empleador asigna al trabajador a B. Ahora considere la siguiente desviación y el discurso que un tipo H podría decir:

Soy de tipo H. Para convencerte voy a desviarme y elegir D. Si me crees, y me pones en el trabajo M en lugar de un trabajo B, obtendré 8 en vez de 6. La razón por la que deberías creerme es que si yo fuese un tipo L que eligió D y tú me promovieras, entonces tendría 5 en lugar de 6 (lo que obtiene en el equilibrio pooling). Por lo tanto, deberías creerme cuando te digo que soy de tipo H porque ningún tipo L haría lo que estoy a punto de hacer.

¿Qué debería pensar el empleador? el argumento tiene sentido...esto da lugar al **criterio intuitivo** de Cho y Kreps (1987).

Refinamiento de PBE en signaling games - Criterio Intuitivo (CI)

Dado un signaling game y un conjunto de tipos Θ finito, y sea $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ un subconjunto de tipos. Defina a $BR_2(\tilde{\Theta}, a_1)$ el conjunto de mejores respuestas de J2 cuando J1 elige a_1 y las creencias μ de J2 ponen probabilidad positiva sólo a $\tilde{\Theta}$, es decir:

$$BR_2(\tilde{\Theta}, a_1) = \bigcup_{\mu \in \triangle(\Theta)} \text{arg max}_{a_2} \sum_{\theta \in \tilde{\Theta}} u_2(a_1, a_2; \theta)\mu(\theta)$$

Definition

Un PBE no sobrevive al criterio intuitivo si existe un $a_1 \in A_1$, $\theta \in \Theta$ y $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ tal que:

1. $u_1(\sigma^*, \theta) > \text{máx}_{a_2 \in BR_2(\tilde{\Theta}, a_1)} u_1(a_1, a_2, \theta)$ para todo $\theta \in \tilde{\Theta}$
2. $u_1(\sigma^*, \theta) < \text{mín}_{a_2 \in BR_2(\Theta \setminus \tilde{\Theta}, a_1)} u_1(a_1, a_2, \theta)$

Refinamiento de PBE en signaling games - Criterio Intuitivo (CI)

La definición dice que un PBE falla el (CI) si dos condiciones se cumplen. Condición (1) establece que cualquier tipo en el subconjunto $\tilde{\Theta}$ nunca elegiría jugar a_1 porque independientemente de qué tipo el J2 cree que es, estaría estrictamente peor que si se adhiera al equilibrio. Condición (2) afirma que el tipo θ estaría estrictamente mejor que el equilibrio jugando a_1 si puede convencer al J2 de que su tipo no está en $\tilde{\Theta}$.

En el juego de Spence, el pooling equilibrium no sobrevive el (CI). En este equilibrio, ambos tipos tienen un pago esperado de 6. Usando la definición tomemos $a_1 = D$, $\tilde{\Theta} = \{L\}$, y $\theta = H$. La condición (1) se cumple porque al elegir D el tipo L estará peor: lo más que puede obtener es 5 (10 del salario de un gerente menos 5 para el coste de la educación). La condición (2) se cumple porque si el J2 está convencido de que el 1 es realmente un tipo H, entonces el tipo H recibirá 8 (10 del salario de un gerente menos 2 para el coste de la educación) en lugar de 6.

El separating equilibrium sobrevive el (CI)....

Signaling Games -Ejemplo (Milgrom and Roberts)

Bain (1949) argumentó que una empresa establecida puede fijar precios *límite* (precios bajos, debajo de los costos marginales) para disuadir la entrada y ser monopolista a largo plazo.

El establecimiento de precios límite se considera un comportamiento anticompetitivo y es ilegal en Estados Unidos.

Sin embargo este argumento es sútil: ¿es razonable castigar a las empresas por cobrar precios bajos? ¿Cómo podemos convencernos de que la intuición de Bain es correcta y que una empresa puede optar por sufrir pérdidas a corto plazo para generar beneficios a largo plazo?

Signaling Games -Ejemplo (Milgrom and Roberts (1982))

El timing de este juego, que captura la historia, se describe de la siguiente manera:

1. La naturaleza elige el tipo de J1 (firma establecida a), $c_a \in \{1,2\}$ (cotos marginales altos $H(c_a = 2)$, o bajos $L(c_a = 1)$, cada tipo con la misma probabilidad. El J2 (firma entrante, b) tiene un $c_b = 2$ observado por ambos jugadores.
2. J1 observa sus costos y decide cuánto producir en el primer período, q_a^1, y el precio en el primer periodo es entonces $P = 5 - q_a^1$.
3. J2 observa q_a^1 y decide si entrar o no a un costo fijo de $F = 12$.
4. Si J2 se queda fuera entonces en el período $t = 2$ J1 elige q_a^2 y el precio es $P = 5 - q_a^2$
5. Si J2 entra entonces en el período $t = 2$ cada i elige simultáneamente q_i^2 y el precio es $P = 5 - q_a^2 - q_b^2$ (competencia de Cournot).

Hallar un PBE separating y uno pooling.

Information Transmission Games (o Cheap Talk)

En situaciones en las que algunos tipos pueden beneficiarse de revelar su información, una señal creíble y costosa puede no estar disponible.

Ahora analizamos estas situaciones. Como en los juegos de señalización, en estos juegos de cheap talk, o transmisión estratégica de información, el J1 tiene información privada y las pagos exhiben common values, de modo que los beneficios de ambos jugadores dependen de la información privada del J1.

A diferencia de los juegos de señalización, sin embargo, la acción del J1 es un mensaje que no tiene efecto directo en los pagos.

Information Transmission Games (o Cheap Talk)

Dada la naturaleza de estos juegos, el J1 a menudo se refiere como el emitente (sender) y el 2 como el receptor (receiver), y el juego normalmente procede en los siguientes pasos:

1. La naturaleza elige el tipo $\theta \in \Theta$ del J1 con una probabilidad de conocimiento común.
2. J1 aprende su tipo y elige un mensaje (acción) $a_1 \in A_1$.
3. J2 observa el mensaje a_1 y elige $a_2 \in A_2$
4. Los pagos $u_1(a_2, \theta_1)$ y $u_2(a_2, \theta_1)$ se realizan.

Obervar que en un signaling game $u_1(a_1, a_2, \theta_1)$, es decir, la acción elegida por J1 afecta sus pagos (obtener el MBA en Spence).

Cheap Talk - Ejemplo 1 (caso finito)

J2 está por mudarse y consulta J1 por su barrio. J2 está evaluando vivir cerca de J1 (son buenos amigos) y la distancia al trabajo (un barrio más alejado del de J1). Si el tráfico es generalmente malo, le gustaría vivir muy cerca del trabajo, si el tráfico es generalmente bueno entonces no le importaría viajar y viviría cerca de J1. Si el tráfico no es ni malo ni bueno, preferiría vivir en el medio; cuanto peor sea el tránsito, más lejos de J1 y al contrario. A J1 le importa más que a J2 que viva cerca de él, y por lo tanto le importa menos cuan malo es su viaje. J2 confía en el conocimiento de J1 sobre las condiciones de tráfico en la zona de la ciudad para que pueda hacer una elección informada.

Cheap Talk - Ejemplo 1 (caso finito)

Formalmente:

- J1 es el emitente y J2 el receptor.
- $\theta \in \{1,3,5\}$ es el tráfico, donde 1 es malo y 5 bueno, seleccionado con probabilidad $\frac{1}{3}$ cada posibilidad.
- J1 conoce el verdadero valor de θ, pero J2 sólo conoce la distribución.
- J1 transmite un mensaje (su acción) al jugador 2 sobre las condiciones de tráfico $a_1 \in A_1 = \{1,3,5\}$.
- El jugador 2 entonces elige una acción (dónde vivir) $a_2 \in A_2 = \{1,2,3,4,5\}$ donde 1 es cerca del trabajo y 5 cerca de J1.
- Los pagos son:

$$u_2(a_2,\theta) = 5 - (\theta - a_2)^2 \quad \text{y} \quad u_1(a_2,\theta) = 5 - (\theta + b - a_2)^2$$

donde $b = 1{,}1$ es el sesgo del J1.

Cheap Talk - Ejemplo 1 (caso finito)

Preguntas:

- ¿Es posible construir un PBE donde J1 le revele la información sobre el verdadero valor de θ a J2 **(fully-informative equilibrium)**?
- ¿Es posible construir un PBE donde el/los mensajes de J1 no revelen ninguna información **(babbling equilibrium)**?
- ¿Es posible construir un PBE donde J2 aprenda algo sobre θ luego del mensaje, es decir, donde alguna información se transmita?

Cheap Talk - Ejemplo 2 (Crawford y Sobel (1982))

- J1 es el emitente y J2 el receptor.
- $\theta \in \Theta = [0,1]$ y $\theta \sim U[0,1]$.
- J1 conoce el verdadero valor de θ, pero J2 sólo conoce la distribución.
- J1 transmite un mensaje (su acción) al J2 sobre θ, $a_1 \in A_1 = [0,1]$.
- El J2 entonces elige una acción $a_2 \in \mathbb{R}$
- Los pagos son:

$$u_2(a_2, \theta) = -(a_2 - \theta)^2 \quad \text{y} \quad u_1(a_2, \theta) = -(a_2 + b - \theta)^2$$

donde b es el sesgo del J1.