Teoría de juegos
Examen 16 de diciembre de 2021

Macar lo que corresponda: Reglamentado ☐ Libre ☐

Nombre ____ C.I. ____

Es una prueba con materiales a la vista

ADVERTENCIA: una respuesta sin fundamentación o explicación podrá ser calificada como insuficiente.

Estudiantes reglamentados: Deben realizar los dos ejercicios de la primera parte y uno a elección de la segunda parte. Se califica sobre tres ejercicios. Disponen de una hora y media.
Estudiantes libres: Deben realizar la totalidad del examen. Se califica sobre cuatro ejercicios. Disponen de dos horas.

Primera parte

Ejercicio 1 (2 puntos)

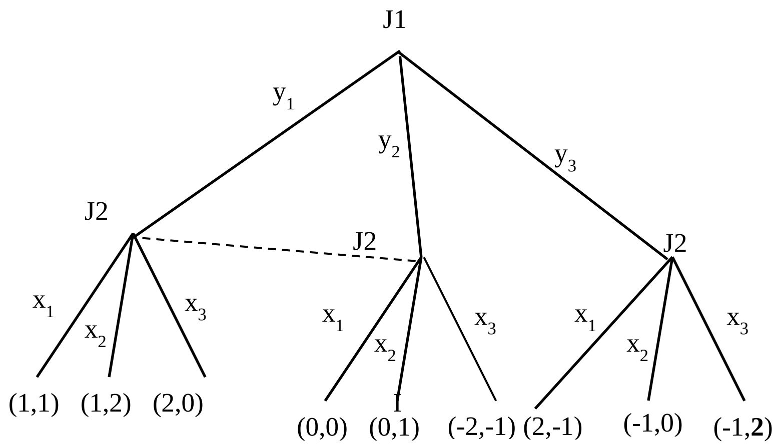
La siguiente matriz representa un juego estático entre el Jugador 1 y el Jugador 2. Los números de la izquierda señalan la utilidad del Jugador 1 y los de la derecha la utilidad del Jugador 2.

		Jugador 2							
		A		B		C		D	
	E	2	1	5	7	5	-3	2	5
Jugador 1	F	5	5	-12	9	12	12	10	5
	G	19	15	11	8	10	1	8	7

2.1 Determine si los jugadores tienen estrategias estrictamente dominadas y en caso afirmativo reduzca la matriz eliminándolas. Fundamente su respuesta.
2.2 Determine si la matriz reducida tiene equilibrio/s de Nash e identifíquelo/s. Fundamente su respuesta.

Ejercicio 2 (2 puntos)

Considere un juego que puede representarse por la siguiente forma extensiva:



2.1. (1/2 punto) Identifique todos los subjuegos. Explique.
2.2. (1/2 punto) Determine los equilibrios de Nash de todos los subjuegos propios. Explique.
2.3. (2 puntos) Determine los equilibrios de Nash que son perfectos por subjuegos.

Segunda parte

Ejercicio 3 (2 puntos)

La siguiente matriz representa un juego estático entre J1 y J2. El número a la izquierda de la coma es la utilidad de J1 y el de la derecha la de J2.

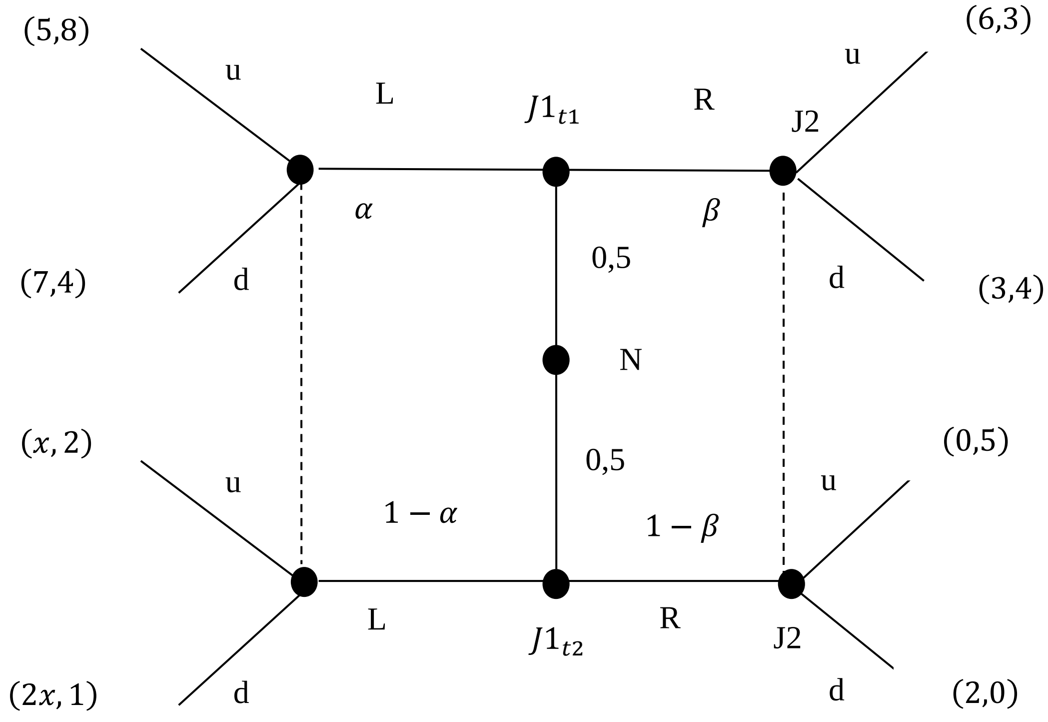
		J2	
		Y_1	Y_2
J1	X_1	3 , 1	2 , 0
	X_2	1 , 0	4 , 2

3.1 Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias puras e identifíquelos. Justifique.

3.2 Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias mixtas, para lo cual asuma que J1 elije X_1 con una probabilidad p, y que J2 elije jugar Y_1 con una probabilidad q. Identifique el EN en estrategias mixtas. Justifique.

Ejercicio 4 (2 puntos)

Considere un juego de información incompleta con la siguiente forma extensiva:



donde $x = 0$, con probabilidad 0,6 y $x = 1$, con probabilidad 0,4. $J1_{t2}$ observa la realización de x antes de tomar su decisión.

¿Existe un equilibrio semiseparador en el que $J1_{t1}$ juega L con certeza y $J1_{t2}$ juega L con probabilidad 0,4 y R con probabilidad 0,6? Si su respuesta es negativa, explique por qué no existe. Si es afirmativa, identifique el perfil de estrategias y creencias correspondiente y muestre que son un equilibrio.

Pauta de respuesta

Ejercicio 1

Comenzando con el Jugador 1, de la comparación de a pares de estrategias se observa que E es estrictamente dominada por G, dado que esta última siempre proporciona mayor utilidad, por lo que elimino E. A continuación, se observa que para el Jugador 2 la estrategia D es estrictamente dominada por B pues ésta siempre reporta mayor utilidad, por lo que elimino D. Luego de las eliminaciones, arribamos a la siguiente matriz reducida:

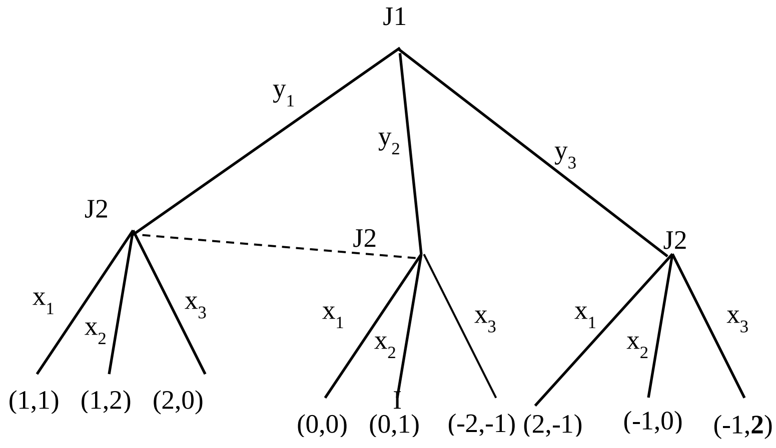
		Jugador 2							
		A		**B**		**C**		**~~D~~**	
	~~E~~	~~2~~	~~1~~	~~5~~	~~7~~	~~5~~	~~-3~~	~~2~~	~~5~~
Jugador 1	**F**	5	5	-12	9	12	12	~~10~~	~~5~~
	G	19	15	11	8	10	1	~~8~~	~~7~~

Como puede observarse, a esta altura no es posible seguir reduciendo la matriz pues ya no quedan estrategias estrictamente dominadas para eliminar. Identificamos los mejores pagos de ambos jugadores (en verde los del Jugador 1, y en amarillo los del Jugador 2). En la matriz reducida existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras que son (G , A) con pagos (19 , 15), y (F , C) con pagos (12 , 12), dado que ambos perfiles de estrategias son combinaciones de respuestas óptimas.

		Jugador 2					
		A		**B**		**C**	
Jugador 1	**F**	5	5	-12	9	12	12
	G	19	15	11	8	10	1

Ejercicio 2 (2 puntos)

Considere un juego que puede representarse por la siguiente forma extensiva:



2.1. (1/2 punto) Identifique todos los subjuegos. Explique.

Hay un solo subjuego propio que comienza luego de que J1 juega y_3

2.2. (1/2 punto) Determine los equilibrios de Nash de todos los subjuegos propios. Explique.

En este subjuego solo juega J2. Su mejor respuesta es x_3 ya que obtiene un pago de 2 que es mejor que -1 o 0, lo que obtendría con las otras dos opciones. El perfil de estrategia (y_3, x_3) es un equilibrio de Nash en este subjuego.

2.3. (2 puntos) Determine los equilibrios de Nash que son perfectos por subjuegos.

¿Cómo identificamos los equilibrios de Nash del juego completo? Primero identificamos las estrategias: J1 tiene tres estrategias, que coinciden con sus acciones. J2 tiene 9 estrategias posibles. Cada estrategia de J2 indica qué hará cuando observa que J1 eligió y_1 o y_2 (no puede saber cuál de las dos) y cuando observa que J1 eligió y_3.

		Jugador 2								
		x_1 x_1	x_1 x_2	x_1 x_3	x_2 x_1	x_2 x_2	x_2 x_3	x_3 x_1	x_3 x_2	x_3 x_3
Jugador 1	y_1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(2,0)	(2,0)	(2,0)
	y_2	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(-2,-1)	(-2,-1)	(-2,-1)
	y_3	(2,-1)	(-1,0)	(-1,2)	(2,-1)	(-1,0)	(-1,2)	(2,-1)	(-1,0)	(-1,2)

Se resaltan los pagos correspondientes a las mejores respuestas, en amarillo las de J1 y en verde las de J2. Identificamos dos equilibrios de Nash en el juego completo (y_1, x_2 x_2) y (y_1, x_2 x_3) ya que son perfiles de estrategia que contienen las mejores respuestas de ambos jugadores.

Un equilibrio perfecto por subjuegos tiene que ser un equilibrio de Nash en el juego completo y en todos los subjuegos. Evalúo entonces los dos equilibrios de Nash del juego completo para ver si cumplen o no el requisito adicional de que sean equilibrios de Nash en los subjuegos.

El equilibrio (y_1, x_2 x_2) no es un equilibrio perfecto por subjuegos porque no es un equilibrio en el único subjuego, ya que x_2 no es la mejor respuesta de J2 cuando J1 juega y_3. En cambio, el equilibrio (y_1, x_2 x_3) es perfectos por subjuegos, ya que también es un equilibrios en el único subjuego del juego porque la mejor respuesta de J2 a y_3 es x_3 y por lo tanto no incluye amenazas vacías.

Ejercicio 3

		J2		
		Y_1	Y_2	
J1	X_1	3 , 1	2 , 0	*p*
	X_2	1 , 0	4 , 2	(1-*p*)
		q	(1-*q*)	

3.1 Primero observo que no existen estrategias estrictamente dominadas, por lo que no es posible resolver el juego por dominación, ni reducir la matriz. A continuación, paso a buscar combinaciones de mejores respuestas para hallar equilibrios de Nash en estrategias puras (ENEP). Pinto los mejores pagos de J1 en amarillo, y los de J2 en verde. Existen 2 ENEP = {(X_1, Y_1) ; (X_2,Y_2)} con pagos {(3,1) ; (4,2)}.

3.2 Paso entonces a hallar el ENEM. Comienzo por J1:

$UE_{J1}(X_1) = 3q + 2(1-q)$ => $2 + q$

$UE_{J1}(X_2) = q + 4(1-q)$ => $4 - 3q$

Ahora igualo ambas utilidades esperadas, para hallar el valor de q que vuelve indiferente a J1:

$2 + q = 4 - 3q$ => $q = 1/2$

Ahora hago lo mismo para J2:

$UE_{J2}(Y_1) = 1p + 0(1-p)$ => p

$UE_{J2}(Y_2) = 0p + 2(1-p)$ => $2 - 2p$

Igualando ambas utilidades esperadas:

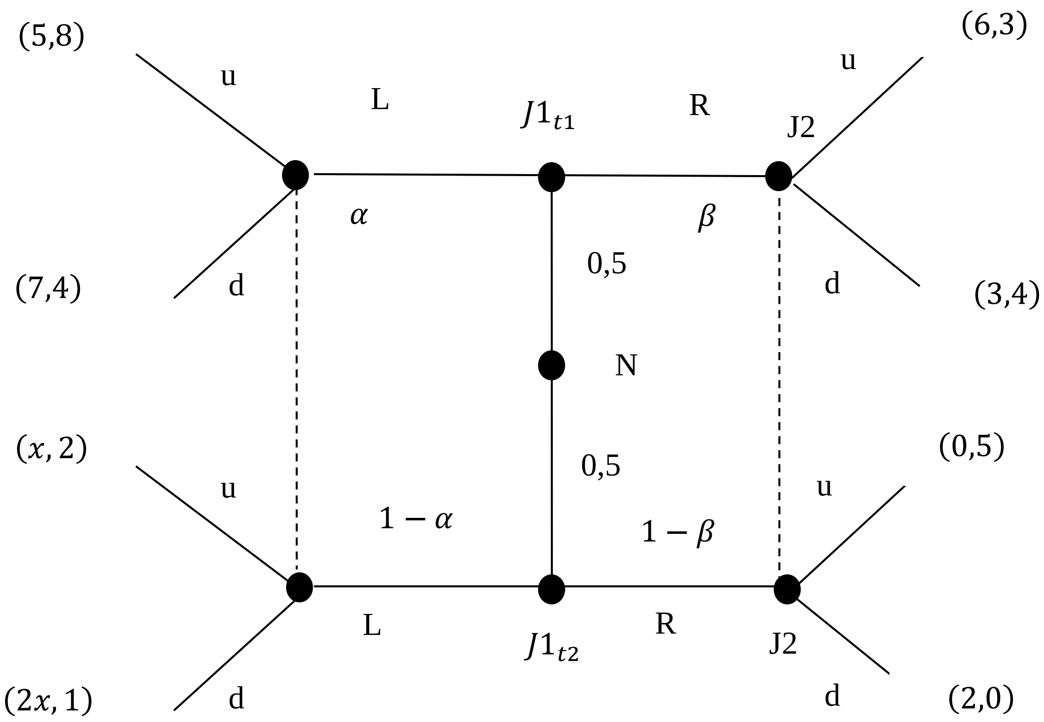
$p = 2 - 2p$ => $p = 2/3$

Existe una combinación de mejores respuestas en estrategias mixtas cuando J1 juega X_1 con una probabilidad de 2/3 y X_2 con una probabilidad de 1/3, y J2 juega Y_1 con una probabilidad de 1/2 e Y_2 con una probabilidad de 1/2.

ENEM = {(2/3 X_1 ; 1/3 X_2) , (1/2 Y_1 ; 1/2 Y_2)}

Ejercicio 4 (2 puntos)

Considere un juego de información incompleta con la siguiente forma extensiva:



donde $x = 0$, con probabilidad 0,6 y $x = 1$, con probabilidad 0,4. $J1_{t2}$ observa la realización de x antes de tomar su decisión.

¿Existe un equilibrio semiseparador en el que $J1_{t1}$ juega L con certeza y $J1_{t2}$ juega L con probabilidad 0,4 y R con probabilidad 0,6? Si su respuesta es negativa, explique por qué no existe. Si es afirmativa, identifique el perfil de estrategias y creencias correspondiente y muestre que son un equilibrio.

Si existiera un equilibrio en el que $J1_{t1}$ juega L y $J1_{t2}$ juega L con probabilidad 0,4 y R con probabilidad 0,6, $J2$ debería actualizar sus creencias después de observar la acción del jugador 1 del siguiente modo:

$$\alpha = Pr(J1_{t1}|L) = \frac{0{,}5 \times\ 1}{0{,}5 \times\ 1 + 0{,}5 \times\ 0{,}4} = 1/1{,}4 = 0{,}71$$

$$\beta = Pr(J1_{t1}|R) = \frac{Pr(J1_{t1}) \times 0}{P(R)} = 0$$

La utilidad esperada de $J2$ es:

- Después de que J1 jugó L, J2 juega u ya que d está dominada en este conjunto de información. Lo mismo puede verse resolviendo lo siguiente:

$$UE_{J2}(u|L) = 8 \times \alpha + 2 \times (1 - \alpha) = 8 \times 0{,}71 + 2 \times (1 - 0{,}71) = 6{,}29$$

$$UE_{J2}(d|L) = 4 \times \alpha + 1 \times (1 - \alpha) = 4 \times 0{,}71 + 1 \times (1 - 0{,}71) = 3{,}14$$

➔ $$UE_{J2}(u|L) > UE_{J2}(d|L)$$

- Después de que J1 jugó R:

$$UE_{J2}(u|R) = 3 \times \beta + 5 \times (1 - \beta) = 3 \times 0 + 5 \times (1 - 0) = 5$$

$$UE_{J2}(d|R) = 4 \times \beta + 0 \times (1 - \beta) = 0$$

➔ $$UE_{J2}(u|R) > UE_{J2}(d|R)$$

Entonces, si hubiera un equilibrio en el que $J1_{t1}$ juega L siempre y $J1_{t2}$ lo hace con probabilidad 0,4, entonces J2 elegiría siempre u.

Mejores respuestas de $J1_{t1}$: sabiendo que J2 jugará arriba, $J1_{t1}$ espera obtener 5 si juega L y 6 si juega R. Por lo tanto, $J1_{t1}$ no juega L y el perfil de estrategias propuesto para los jugadores 1 no puede ser parte de un equilibrio bayesiano perfecto.