Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

**Teoría de juegos**

**Examen 22 de diciembre de 2022**

Macar lo que corresponda: Reglamentado ☐ Libre ☐

Nombre ______________________________________________ C.I. ________________________________________

**Es una prueba con materiales a la vista**

**ADVERTENCIA: una respuesta sin fundamentación o explicación podrá ser calificada como insuficiente.**

**Estudiantes reglamentados:** Deben realizar los dos ejercicios de la primera parte y uno a elección de la segunda parte. Se califica sobre tres ejercicios. Disponen de una hora y media.
**Estudiantes libres:** Deben realizar la totalidad del examen. Se califica sobre cuatro ejercicios. Disponen de dos horas.

## Primera parte

**Ejercicio 1** (2 puntos)

La siguiente matriz representa un juego estático entre el Jugador 1 y el Jugador 2. Los números entre paréntesis representan las utilidades de los jugadores. El número a la izquierda de la coma es la utilidad del jugador 1 y el de la derecha, la utilidad del jugador 2.

| | | Jugador 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
| Jugador 1 | $x_1$ | (1,1) | (1,-1) | (-3,0) | (3,-2) |
| | $x_2$ | (-1,-2) | (2,0) | (-2,-2) | (-5,-2) |
| | $x_3$ | (-2,1) | (0,1) | (-3,-3) | (-1,-2) |
| | $X_4$ | (-2,0) | (-1,3) | (-4,-4) | (-1,-2) |

1.1 (1 punto) Determine si los jugadores tienen estrategias estrictamente dominadas y reduzca la matriz en caso afirmativo. Fundamente.
1.2 (1 punto) Determine si la matriz reducida tiene equilibrios de Nash e identifíquelos. Fundamente.

**Ejercicio 2** (2 puntos)

La siguiente matriz representa un juego estático entre J1 y J2. Los números entre paréntesis representan las utilidades de los jugadores. El número a la izquierda de la coma es la utilidad de J1 y el de la derecha la de J2.

| | | **J2** | |
|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ |
| **J1** | $A_1$ | (5,2) | (0,0) |
| | $A_2$ | (1,1) | (3,3) |

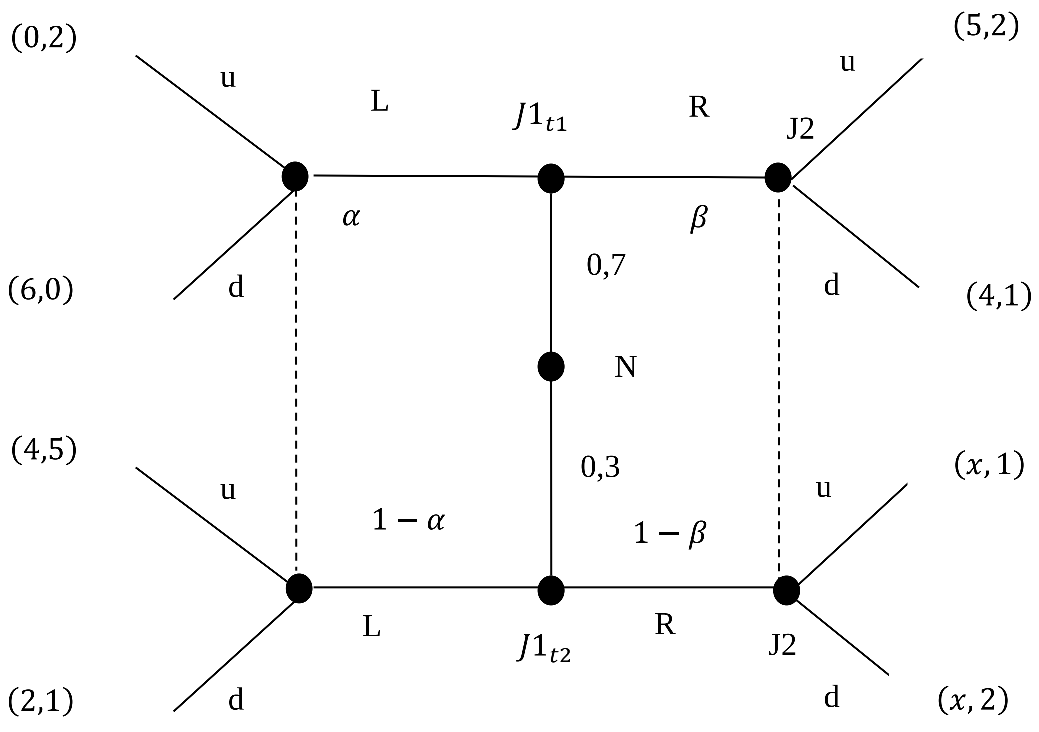
2.1 (0.5 punto) Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias puras e identifíquelos. Justifique.

2.2 (1.5 puntos) Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias mixtas, para lo cual asuma que J1 elije $A_1$ con una probabilidad $p$, y que J2 elije jugar $B_1$ con una probabilidad $q$. Identifique el EN en estrategias mixtas. Justifique.

**Segunda parte**

**Ejercicio 3** (2 puntos)

Considere un juego de información incompleta con la siguiente forma extensiva:

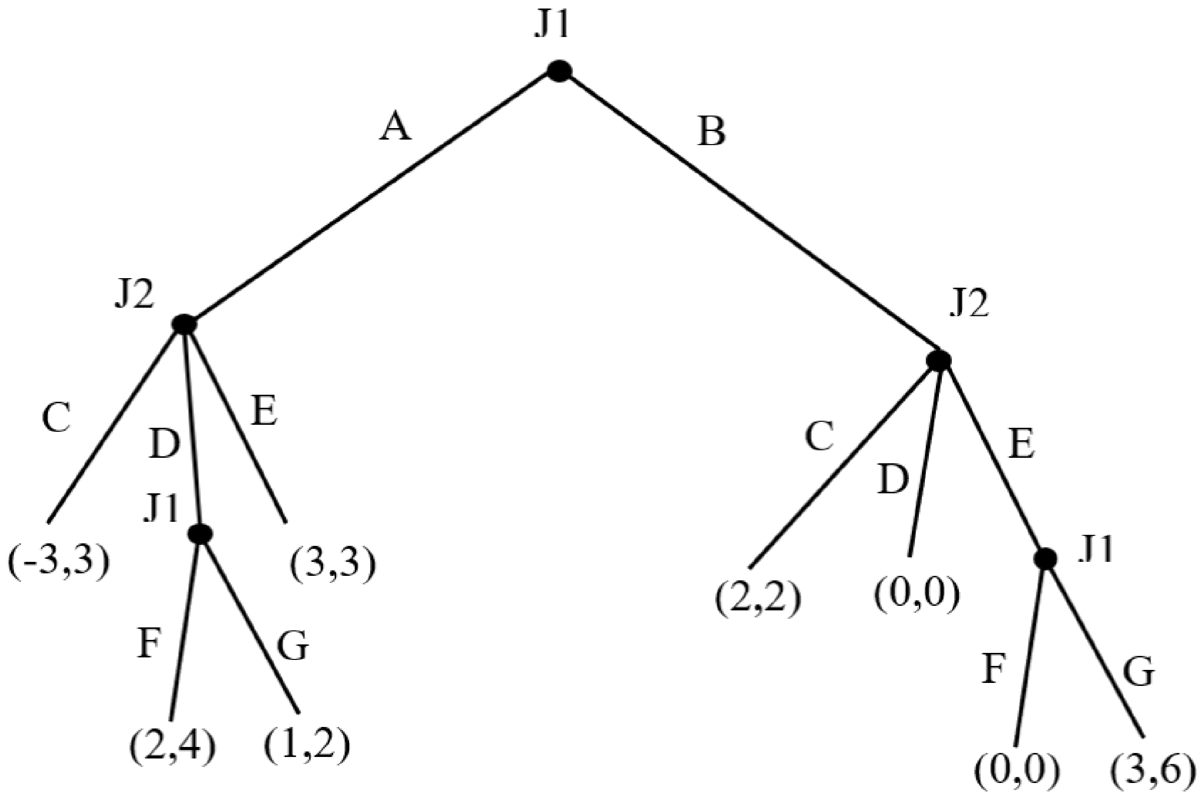



Donde $x = 1$ con probabilidad 0,6 y $x = 0$ con probabilidad 0,4.

3.1. ¿Existe un equilibrio semi-separador en el que $J1_{t2}$ juega a veces L y a veces R? Si su respuesta es afirmativa, describa ese equilibrio. Si su respuesta es negativa, explique por qué llega a esa conclusión.

3.2. ¿Existe un equilibrio separador en el que $J1_{t1}$ juega R y $J1_{t2}$ juega L con certeza en este juego? En otras palabras, ¿existe un equilibrio en el que $J1_{t1}$ juega R y $J1_{t2}$ juega L con probabilidad uno? Si su respuesta es afirmativa, describa ese equilibrio. Si su respuesta es negativa, explique por qué llega a esa conclusión.

**Ejercicio 4** (2 puntos)
Considere el siguiente juego en forma extensiva:




4.1 Determine el resultado por retroinducción
4.2 Identifique los subjuegos
4.3 Indique cuáles son las estrategias de los jugadores
4.4 Diga cuáles son los perfiles de estrategias que coinciden con el resultado por retroinducción.

**Pauta de respuesta**

**Ejercicio 1**

1.1 Procedemos a comparar estrategias de ambos jugadores, de a pares para hallar estrategias estrictamente dominadas y poder reducir la matriz. Empezando por el Jugador 1 observamos que $x_1$ domina estrictamente a $x_4$, por lo que eliminamos la última. El Jugador 2 tiene una EED que es $y_4$, dado que $y_2$ reporta siempre pagos mayores para cualquier estrategia del Jugador 1. Por tanto, podemos eliminarla y reducir la matriz.

| | | Jugador 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
| Jugador 1 | $x_1$ | (1,1) | (1,-1) | (-3,0) | (3,-2) |
| | $x_2$ | (-1,-2) | (2,0) | (-2,-2) | (-5,-2) |
| | $x_3$ | (-2,1) | (0,1) | (-3,-3) | (-1,-2) |
| | $x_4$ | (-2,0) | (-1,3) | (-4,-4) | (-1,-2) |

Habiendo eliminado $y_4$ vuelvo a revisar estrategias de ambos jugadores para ver si todavía existen EED para eliminar. Como se observa, para el Jugador 1 $x_2$ domina estrictamente a $x_3$, por lo que esta última se elimina.

| | | Jugador 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
| Jugador 1 | $x_1$ | (1,1) | (1,-1) | (-3,0) |
| | $x_2$ | (-1,-2) | (2,0) | (-2,-2) |
| | $x_3$ | (-2,1) | (0,1) | (-3,-3) |

Una vez hecho esto, podemos observar que ya no existen otras EED para ninguno de los dos jugadores, por lo que no es posible seguir reduciendo la matriz de pagos. La matriz reducida queda del siguiente modo:

| | | Jugador 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
| Jugador 1 | $x_1$ | (1,1) | (1,-1) | (-3,0) |
| | $x_2$ | (-1,-2) | (2,0) | (-2,-2) |

1.2 Sobre la matriz reducida paso a encontrar EN. Para ello marco en rojo los mejores pagos del Jugador 1, y en verde los del Jugador 2. Como se observa, existen dos combinaciones de mejores respuestas, por lo que existen dos EN en estrategias puras que son {($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$)} con pagos {(1,1), (2,0)}.

**Ejercicio 2**

2.1

| | | J2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ | |
| J1 | $A_1$ | (5,2) | (0,0) | *p* |
| | $A_2$ | (1,1) | (3,3) | *1-p* |
| | | *q* | *1-q* | |

Primero observo que no existen EED, por lo que no es posible resolver el juego por dominación, ni reducir la matriz. A continuación, paso a buscar combinaciones de mejores respuestas para hallar EN en estrategias puras (ENEP). Pinto los mejores pagos de J1 en rojo, y los de J2 en verde. Existen dos combinaciones de mejores respuestas, por lo que los perfiles de estrategias ($A_1$, $B_1$) y ($A_2$, $B_2$) son ENEP, con pagos (5,2) y (3,3) respectivamente.

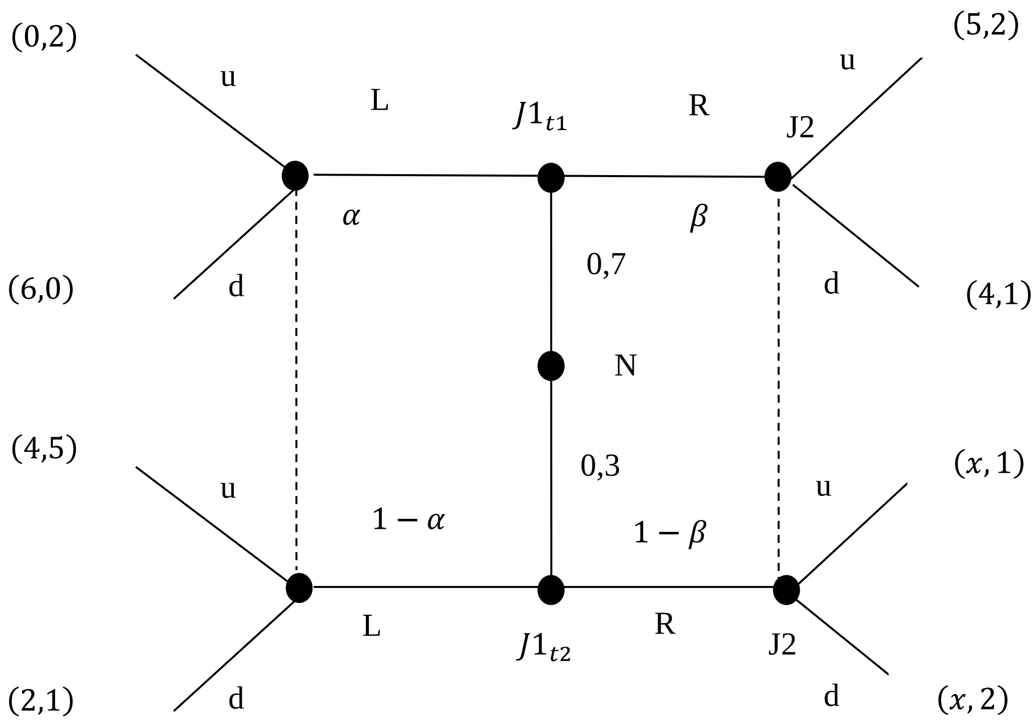
2.2 Paso entonces a hallar el ENEM. Comienzo por J1:
$UE_{J1}(A_1) = 5q + 0(1\text{-}q)$ => $5q$
$UE_{J1}(A_2) = q + 3(1\text{-}q)$ => $3 - 2q$
Ahora igualo ambas utilidades esperadas, para hallar el valor de $q$ que vuelve indiferente a J1:
$5q = 3 - 2q$ => $7q = 3$ => $q = 3/7$

Ahora hago lo mismo para J2:
$UE_{J2}(B_1) = 2p + 1(1\text{-}p)$ => $p + 1$
$UE_{J2}(B_2) = 0p + 3(1\text{-}p)$ => $3 - 3p$
Igualando ambas utilidades esperadas:
$p + 1 = 3 - 3p$ => $4p = 2$ => $p = 1/2$

Existe una combinación de mejores respuestas en estrategias mixtas cuando J1 juega $A_1$ con una probabilidad de 1/2 y $A_2$ con una probabilidad de 1/2, y J2 juega $B_1$ con una probabilidad de 3/7 y $B_2$ con una probabilidad de 4/7.
ENEM = {(1/2 $A_1$ ; 1/2 $A_2$) , (3/7 $B_1$ ; 4/7 $B_2$)}

**Ejercicio 3** (2 puntos)

Considere un juego de información incompleta con la siguiente forma extensiva:




Donde $x = 1$ con probabilidad 0,6 y $x = 0$ con probabilidad 0,4.

3.1. ¿Existe un equilibrio semi-separador en el que $J1_{t2}$ juega a veces L y a veces R? Si su respuesta es afirmativa, describa ese equilibrio. Si su respuesta es negativa, explique por qué llega a esa conclusión.

No existe un equilibrio con esas características en este juego. $J1_{t2}$ tiene pagos aleatorios, lo cual podría inducir a pensar en un equilibrio semiseparador, pero los dos pagos que puede obtener este jugador si elige R son menores al peor de los pagos que obtiene si juega L. Por lo tanto, $J1_{t2}$ jugará siempre L.

3.2. ¿Existe un equilibrio separador en el que $J1_{t1}$ juega R y $J1_{t2}$ juega L con certeza en este juego? En otras palabras, ¿existe un equilibrio en el que $J1_{t1}$ juega R y $J1_{t2}$ juega L con probabilidad uno? Si su respuesta es afirmativa, describa ese equilibrio. Si su respuesta es negativa, explique por qué llega a esa conclusión.

Si existiera un equilibrio separador como el propuesto, $J2$ debería concluir que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. En un equilibrio como este, $J1_{t1}$ nunca juega L y $J1_{t2}$ nunca juega R y, por lo tanto, $J2$ puede concluir que no puede ser de tipo 1, después de observar que el jugador 1 juega L, y que no puede ser de tipo 2, después de observar que el jugador 1 juega R.

La mejor jugada de J2 después de que J1 elige L es u, ya que d está dominada en este conjunto de información. La mejor jugada de J2 después de que J1 elige R es también u, ya que $\beta = 1$ y entonces J2 sabe que obtendrá 2 si juega u y 1 si juega d.

Anticipando que $J2$ jugará siempre u, $J1_{t1}$ elige R, ya que haciendo esto obtiene 5 y jugando L obtiene 0. $J1_{t2}$ elige L ya que R está dominada.

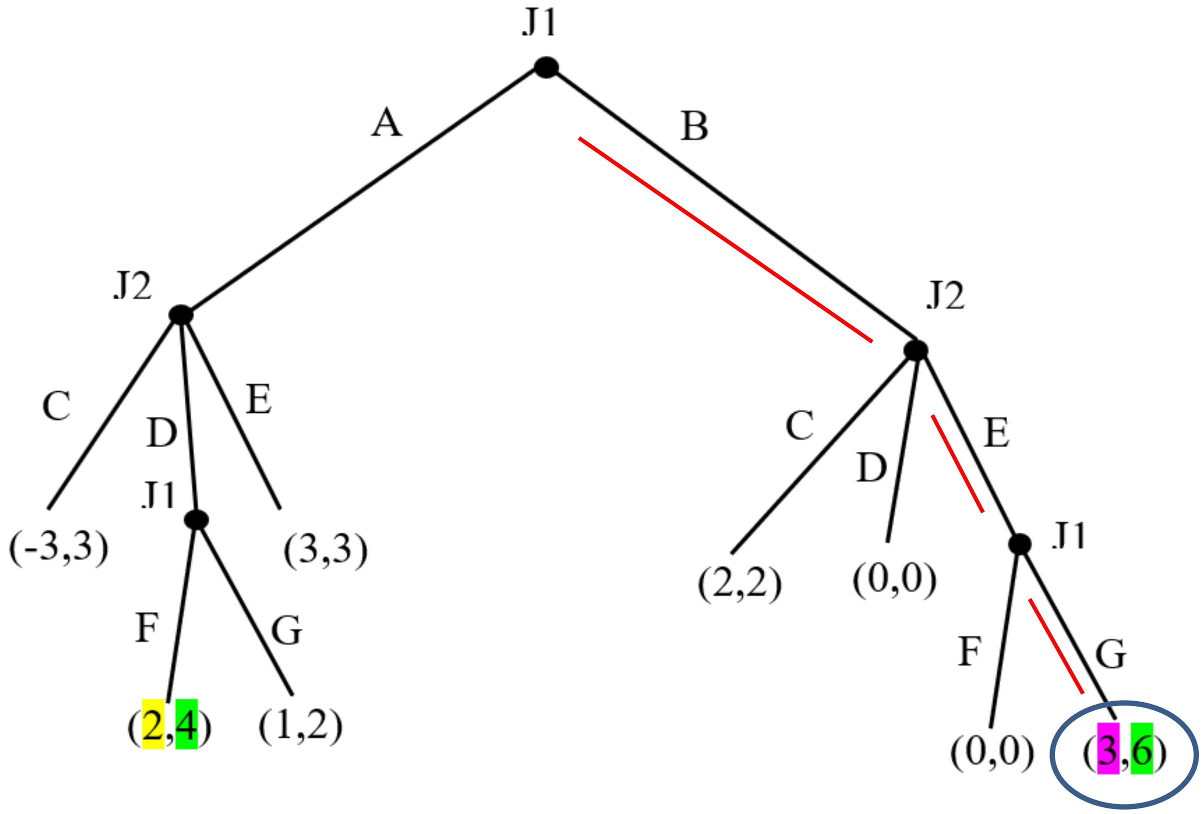
Conclusión: existe un equilibrio separador con las siguientes características:

- $J1_{t1}$ juega R con probabilidad 1.
- $J1_{t2}$ juega L con probabilidad 1.
- $J2$ juega siempre u.
- $J2$ asigna probabilidades $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ a que J1 sea de tipo 1, después de observar que J1 jugó L y R, respectivamente.

**Ejercicio 4**

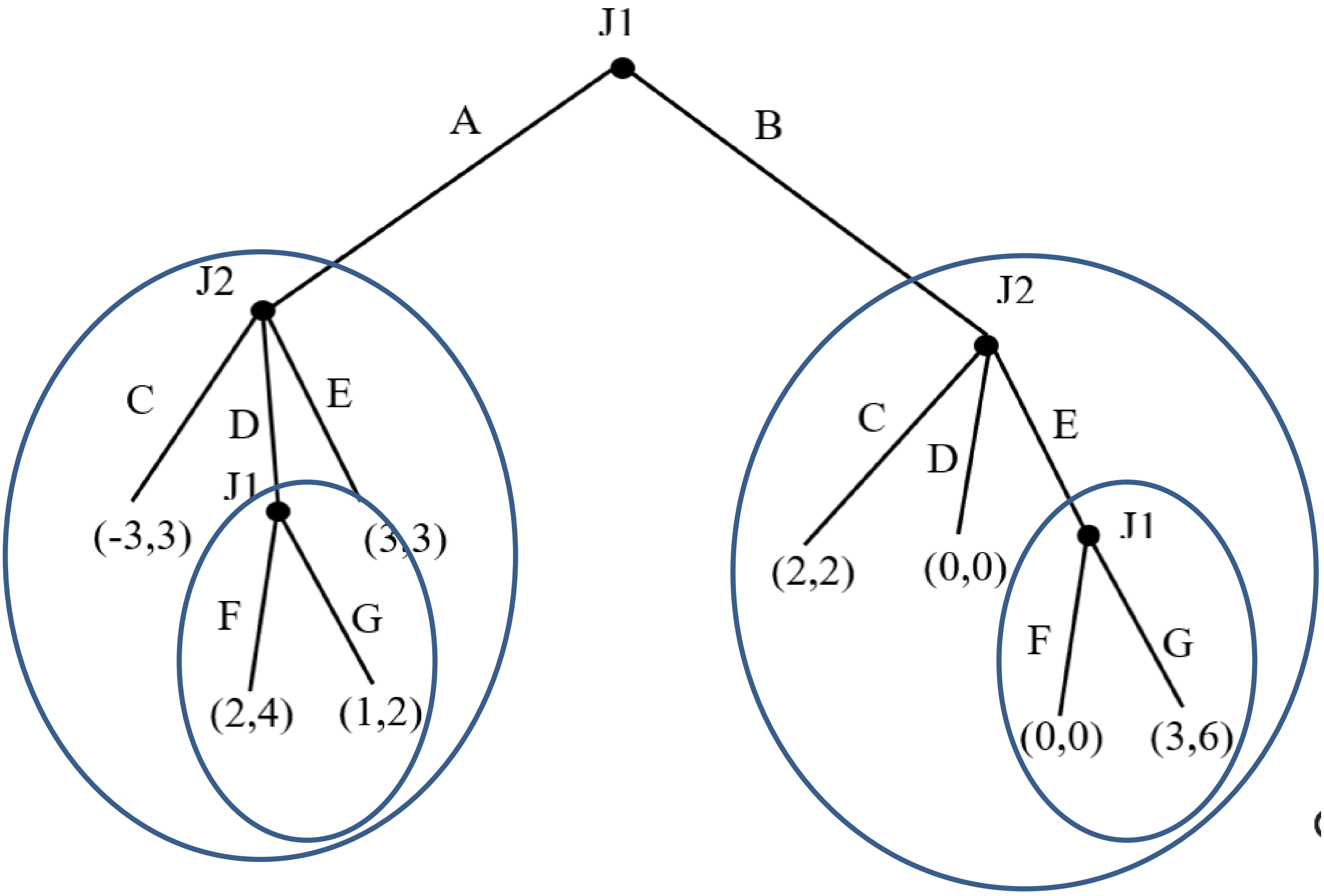
4.1 Determine el resultado por retroinducción

Para encontrar el resultado por retroinducción debemos comenzar por el final del juego. En este caso, existen dos posibles finales del juego en el tercer nivel del árbol, luego de que J1 juega por segunda vez. Allí identificamos que si J1 está del lado izquierdo jugará F, porque obtiene una utilidad de 2 en lugar de 1 y, si está del lado derecho, jugará G porque obtiene 3 en lugar de 0. También existen otros cuatro finales del juego, pero en el segundo nivel en los que J1 no vuelve a jugar. Por un lado, luego de que J1 juega A, J2 podría jugar C o E, con lo que se termina el juego. Pero en ambos casos J2 obtendría una utilidad de 3, por lo que no elegiría ninguna de esas opciones, ya que jugando D, sabe que J1 jugará F y obtendrá una utilidad de 4 que es mejor que 3. Por otro lado, luego de que J1 juega B, J2 podría jugar C o D y terminar el juego, con lo que obtendría una utilidad de 2 o 0 respectivamente. Pero, nuevamente, no tomaría ninguna de esas opciones ya que sabe que si juega E, J2 jugará G con lo que obtendrá una utilidad de 6 que supera a las otras opciones. Finalmente, y pasando al primer nivel del árbol, J1 sabe que J2 tomará una de las opciones que le permiten volver a jugar y que no terminará el juego. También sabe que si juega A, su mejor opción, luego de que juegue J2, le permite obtener una utilidad de 2 y que si juega B, su mejor opción, luego de que juegue J2, le permite obtener una utilidad de 3, por lo que cuando comienza el juego J1 jugará B porque obtendrá 3 en lugar de 2. El resultado por retroinducción se produce entonces luego de que J1 juega B en primer término, luego J2 elige E y, finalmente, J1 juega G, con lo que J1 obtiene 3 unidades de utilidad y J2 obtiene 6.




4.2 Identifique los subjuegos

Un subjuego en un juego en forma extensiva es una parte del juego que:
a) Empieza en un nodo de decisión que constituye un conjunto de información con un único nodo (singleton).
b) Incluye a todos los nodos que lo siguen.
c) No intersecta a ningún otro conjunto de información.




En este juego podemos identificar cuatro subjuegos propios (excluyendo el juego completo). i) el subjuego que comienza cuando le toca jugar a J2 luego de que J1 jugó A; ii) el subjuego que comienza cuando le toca jugar a J2 luego de que J1 jugó B; iii) el subjuego que comienza cuando le toca jugar a J1 por segunda vez, luego de haber jugado A y que J2 haya jugado D; y iv) el subjuego que comienza cuando le toca jugar a J1 por segunda vez, luego de haber jugado B y que J2 haya jugado E

4.3 Indique cuáles son las estrategias de los jugadores

Una estrategia es un plan de acción de un jugador que considera todas las acciones que debe elegir cuando le toque jugar. En este caso J1 tiene 4 estrategias. En primer término, debe elegir si jugar A o B y, luego y llegado el caso en el que el que J2 juegue D (luego de que J1 juega A) o juegue E (luego de que J1 juega B), tendrá que optar por F o G. Entonces sus cuatro estrategias posibles son AF, AG, BF y BG. Por su parte, J2 tiene 9 estrategias, ya que debe elegir entre tres posibles acciones en dos situaciones diferentes. Puede jugar C, D o E tanto luego de que J1 haya jugado A como luego de que haya jugado B. Entonces las nueve estrategias de J2 son: CC, CD, CE, DC, DD, DE, EC, ED, EE, considerando que en primer lugar figura la acción a tomar luego de que J1 haya jugado A y, en segundo lugar, la acción de J2 luego de que J1 haya jugado B.

4.4 Diga cuáles son los perfiles de estrategias que coinciden con el resultado por retroinducción y cuáles son perfectas por subjuegos.

El resultado por retroinducción es que J1 juega B en la primera ocasión en que le toca jugar, luego J2 juega E y, finalmente, J1 juega G. Por lo tanto la única estrategia de J1 que puede conducir a ese resultado es BG. A su vez, ese resultado implica que J2 juegue E luego de que J1 haya jugado B, por lo que J2 tiene tres estrategias que conducen al resultado por retroinducción cuando J1 utiliza la estrategia BG: CE, DE y EE, es decir, todas las estrategias que implican jugar E luego de que J1 juega B. Por lo tanto, los perfiles de estrategia que conducen al resultado por retroinducción son: (BG, CE), (BG, DE) y (BG, EE). Pero sólo (BG, DE) es un equilibrio perfecto por subjuegos, ya que J2 no jugaría C o E si J1 jugara A.