Tema 1: Juegos en forma estratégica/normal: definición, soluciones y ejemplos.

Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2024

Experimento

Cada uno de ustedes tiene que seleccionar un número entero entre 0 y 100 con el propósito de adivinar "2/3 del promedio de las respuestas dadas por todos los estudiantes del curso". Cada estudiante que adivine el número entero más cercano a 2/3 del promedio de las respuestas dadas, salvará el curso sin hacer el exámen (o, alternativamente, tendrá la satisfacción de haber contestado correctamente).

Componentes de un juego

...que hay que definir

1. **Jugadores**: ¿quién está involucrado?
2. **Reglas**: ¿cómo mueven?; ¿qué saben cuando mueven?; ¿qué pueden hacer?
3. **Resultados**: para cada conjunto posible de acciones de los jugadores: ¿cuáles son los resultados del juego?
4. **Pagos**: ¿cuáles son las preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados?

Juegos en forma estratégica (o normal)

Definition

Un juego estático con información completa en forma estratégica, $\langle N, (A_i)_i, (u_i)_i \rangle$ consiste en:

1. Un conjunto de jugadores N.
2. Para cada $i \in N$ un conjunto no vacío A_i de acciones (ahora, y sólo ahora, estrategias -puras-).
3. Para cada $i \in N$, una función de pagos $u_i : A \to \mathbb{R}$, donde $A = \prod_{i \in N} A_i$.

Notación:

- Un *perfil de estrategias puras* es: $a = (a_i)_i \in A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i \in N} A_i$.
- a_{-i} es el perfil de estrategias de todos los jugadores menos i. $A_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} A_j$.
- Los pagos que obtiene i de a son: $u_i(a) = u(a_1, ..., a_n) = u(a_i, a_{-i})$.

Ejemplo

- Ejemplo: Dilema del prisionero
  - Jugadores: prisionero 1, prisionero 2 ($N = \{1,2\}$)
  - Acciones (estrategias): $A_i = \{c, \bar{c}\}$, $i = 1$, 2, donde c es confesar y $\bar{c}$ no confesar
  - Estructura: juegan sin saber lo que hace el otro
  - Pagos:
    a Si ambos confiesan tienen una pena de 5 años;
    b Si el prisionero 1 no confiesa pero el 2 si, el primero obtiene una pena de 10 años y el segundo una pena de 1 año por colaborar con la justicia;
    c Si ninguno confiesa ambos son procesados por un delito menor y obtienen una pena de 2 años

Representación matricial

		Prisionero 2	
		c	$\bar{c}$
Prisionero 1	c	-5, -5	-1, -10
	$\bar{c}$	-10, -1	-2, -2

Interpretaciones de juego estratégico

1. Evento que ocurre **sólo una vez**; cada jugador conoce los detalles del juego y el hecho de que todos los jugadores son "racionales", y los jugadoras eligen sus acciones simultáneamente e independientemente. Bajo esta interpretación, cada jugador desconoce, al elegir su acción, las elecciones que están siendo tomadas por los otros jugadores; no hay información (excepto las primitivas del modelo) en la que un jugador puede basar su expectativa del comportamiento de los demás jugadores.
2. Un jugador puede formar sus expectativas sobre el comportamiento de los otros jugadores basándose en información sobre la forma en que el juego (o similar) se jugó en el pasado. Una **secuencia de juegos** del juego sólo puede ser modelada por un juego estratégico si no hay vínculos estratégicos entre los juegos: un individuo que juega el juego muchas veces debe preocuparse sólo por su pago instantáneo e ignorar los efectos de su acción actual en el comportamiento futuro de los otros jugadores. En esta interpretación, es apropiado modelar una situación como un juego estratégico sólo en la ausencia de un vínculo estratégico intertemporal entre las ocurrencias de la interacción.

Supuestos

1. Jugadores son racionales: eligen acciones para maximizar sus pagos, consistente con sus creencias.
2. Jugadores conocen todo acerca del juego (acciones, "outcomes", pagos del resto de los jugadores).
3. Los elementos anteriores son de conocimiento común ("common knowledge").
   - Un evento E es conocimiento común si: (1) todos conocen a E, (2) todos saben que todos conocen E, (3) todos saben que todos saben que todos conocen E,...y así sucesivamente ad infinitum.

Soluciones

Objetivo de la teoría de juegos:

- Predecir el comportamiento de jugadores racionales en situaciones estratégicas.
- Útil para:
    1. Los participantes, que necesitan predecir las elecciones de otros jugadores.
    2. Diseñador de las reglas del juego: subasta, contratos,..
    3. Explicar el comportamiento.

Una **solución** (o **equilibrio**) es una descripción sistemática de los resultados que pueden surgir en una familia de juegos.

- La teoría de juegos sugiere soluciones razonables para clases de juegos y examina sus propiedades.

Evaluando concepto de equilibrio

Un equilibrio es un perfil de acciones o estrategias (una acción para cada jugador).

Esto son algunos criterios para evaluar un concepto de equilibrio.

1. Existencia: ¿Que tan seguido podemos aplicarlo?
   - Un concepto de solución es valioso en la medida en que puede aplicarse a una amplia variedad de juegos, y no sólo a una pequeña y selectiva familia de juegos.
2. Unicidad: ¿Cuánto limita el comportamiento?
   - Unicidad es una contraparte importante de la existencia. Si el concepto de solución propuesto dice "todo puede suceder", entonces siempre existe. Este concepto de solución es inútil. Una buena solución es una que equilibra existencia (funciona para muchos juegos) con unicidad (predicción).
3. Invariante: la solución no debería cambiar "mucho" si perturbamos los pagos.
4. Evaluando resultados: Optimalidad según Pareto.

Perfiles Pareto Optimos (eficientes)

Definition

Dado un juego $\langle N, (A_i)_i, (u_i)_i \rangle$. Un perfil $a = (a_i)_i$ domina a otro perfil $b = (b_i)_i$ si:

$$u_i(a) \geq u_i(b) \ \forall i \in N,$$

y existe $j \in N$ tal que:

$$u_j(a) > u_j(b).$$

Definition

Un perfil es Pareto Óptimo si no es dominado por ningún otro perfil.

Mejor respuesta

Definition

Dado $a_{-i} \in A_{-i}$, decimos que a_i es una mejor respuesta del jugador i a a_{-i} si:

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(\tilde{a}_i, a_{-i}) \quad \forall \tilde{a}_i \in A_i.$$

Equilibrio en Estrategias Dominantes

Estrategias dominantes

Definition

Dado un juego $\langle N,(A_i)_i,(u_i)_i\rangle$. Una estrategia a_i es una estrategia estrictamente dominante si:

$$u_i(a_i,a_{-i}) > u_i(\tilde{a}_i,a_{-i}) \quad \forall \tilde{a}_i \in A_i, \text{y} \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}.$$

Definition

Dado un juego $\langle N,(A_i)_i,(u_i)_i\rangle$. Una estrategia a_i es una estrategia débilmente dominante si:

$$u_i(a_i,a_{-i}) \geq u_i(\tilde{a}_i,a_{-i}) \quad \forall \tilde{a}_i \in A_i, \text{y} \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}.$$

Nota: si sólo decimos estrategia dominante, nos referimos a débilmente dominantes.

Estrategias dominantes

Definition

Un equilibrio en estrategias dominantes es un perfil (de estrategias) en el cual cada jugador está jugando una estrategia dominante.

Proposition

Si existe, un equilibrio en estrategias **estrictamente dominantes** es único.

Estrategias dominantes

¿Por qué importa la Dominancia?

- Concepto atractivo ya que sólo se basa en el supuesto de racionalidad de los jugadores.
- Un jugador racional nunca jugará una estrategia estrictamente dominada.
- De manera similar, si existe una estrategia estrictamente dominante, el jugador racional siempre la jugará.
- Podemos usar el concepto de dominancia para entender qué estrategias serán usadas.

Iterated Elimination of Strictly Dominated Pure Strategies

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

- Recuerdar supuesto de *common knowledge*: la estructura del juego y la racionalidad de los jugadores son conocimientos comunes entre los juegos.
- La introducción del conocimiento común de la racionalidad nos permite hacer mucho más que identificar estrategias que los jugadores racionales evitarán.

Definition

$a_i \in A_i$ es una estrategia estrictamente dominada si existe una estrategia $\tilde{a}_i \in A_i$ que cumple:

$$u_i(\tilde{a}_i, a_{-i}) > u_i(a, a_{-i}) \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}.$$

- Si todos los jugadores saben que cada jugador nunca jugará una estrategia estrictamente dominada, pueden ignorar efectivamente esas estrategias que sus adversarios nunca jugarán, y sus oponentes pueden hacer lo mismo.

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

- Si el juego original tiene algunos jugadores con algunas estrategias estrictamente dominadas, entonces todos los jugadores saben que efectivamente se están enfrentando a un juego restringido "menor" con menos estratégias totales. Esta lógica puede ir más allá...
- Debido a que es conocido comúnmente que todos los jugadores son racionales, entonces todos saben que todo el mundo sabe que el juego es efectivamente un juego más pequeño.
- En este juego restringido más pequeño, todo el mundo sabe que los jugadores no jugarán estrategias estrictamente dominadas.
- De hecho, podemos encontrar estrategias adicionales que están dominadas en el juego restringido que no estaban dominados en el partido original.
- Debido a que es común saber que los jugadores volverán a realizar este tipo de razonamiento, el proceso puede continuar hasta que no se puedan eliminar más estrategias de esta manera.

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

Ejemplo:

		Jugador 2		
		I	M	D
	a	4,3	5,1	6,2
Jugador 1	b	2,1	8,4	3,6
	c	3,0	9,6	2,8

M está estrictamente dominada por D, por lo que podemos removerla del conjunto de estrategias del jugador 2

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

En el juego resultante:

		Jugador 2	
		I	D
	a	4,3	6,2
Jugador 1	b	2,1	3,6
	c	3,0	2,8

b y c están estrictamente dominadas por a, por lo que podemos removerla del conjunto de estrategias del jugador 1

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

En el juego resultante:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	a	4,3	6,2

I domina a D, por lo que sabemos que el perfil de estrategias (a, I) es el que se va a jugar.

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

En el juego resultante:

		Jugador 2	
		I	D
Jugador 1	a	4,3	6,2

I domina a D, por lo que sabemos que el perfil de estrategias (a, I) es el que se va a jugar.

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

Definition

Llamaremos a cualquier perfil de estrategia $a \in A$ que sobreviva el proceso de IESDS un equilibrio de eliminación iterado.

Eliminación Iterativa de Estrategias Estrictamente Dominadas

- Existencia: es posible aplicar IESDS a cualquier juego aplicando el algoritmo que acabamos de describir.
  - No exige la existencia de una estrategia estrictamente dominante, ni requiere la existencia estrategias estrictamente dominadas.
  - Sin embargo, es esta última característica la que permite que el proceso de IESDS pueda restringir el comportamiento.
- Esto viene a costa de unicidad....

Equilibrio de Nash

Ejemplos: Bach o Stravisnky

Las anteriores soluciones no restingen el comportamiento del siguiente juego:

		Jugador 2	
		Bach	Stravinsky
Jugador 1	Bach	2,1	0,0
	Stravisnky	0,0	1,2

Equilibrio de Nash

1. Steady state del juego: un punto en el cual nadie tiene incentivos a moverse.
2. En equilibrio, cada jugador tiene expectativas (creencias) correctas acerca del comportamiento de los otros jugadores y actúa de forma racional.
3. **No** buscamos examinar el proceso por el cual se llega al steady state.

Equilibrio Nash (EN)

Definition

Un equilibrio de Nash de un juego estratégico $\langle N, (A_i)_i, (u_i)_i \rangle$ es un perfil de acciones a^* tales que para cada jugador $i \in N$ tenemos:

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*) \quad \forall a_i \in A_i.$$

Equivalente a decir: $\forall i \in N$, a_i^* es una mejor respuesta a a_{-i}^*.

Ejemplos: Bach o Stravisnky

		Jugador 2	
		Bach	Stravinsky
Jugador 1	Bach	2,1	0,0
	Stravisnky	0,0	1,2

Ejemplos: Bach o Stravisnky

		Jugador 2	
		Bach	Stravinsky
Jugador 1	Bach	2,1	0,0
	Stravisnky	0,0	1,2

Agentes quieren coordinar pero tienen intereses diferentes. No podemos (Pareto) rankear los equilibrios.

Ejemplos: Un juego de coordinación

		Jugador 2	
		Mozart	Mahler
Jugador 1	Mozart	2,2	0,0
	Mahler	0,0	1,1

Ejemplos: Un juego de coordinación

		Jugador 2	
		Mozart	Mahler
Jugador 1	Mozart	2,2	0,0
	Mahler	0,0	1,1

Dos EN, uno domina al otro.

Ejemplos: Matching Pennies

		Jugador 2	
		Head	Tail
Jugador 1	Head	1,-1	-1,1
	Tail	-1,1	1,-1

Ejemplos: Matching Pennies

		Jugador 2	
		Head	Tail
Jugador 1	Head	1,-1	-1,1
	Tail	-1,1	1,-1

Un jugador quiere coordinar y el otro no.

Ejemplos: Dilema prisionero

		Jugador 2	
		No Confesar	Confesar
Jugador 1	No Confesar	3,3	0,4
	Confesar	4,0	1,1

Ejemplos: Dilema prisionero

		Jugador 2	
		No Confesar	Confesar
Jugador 1	No Confesar	3,3	0,4
	Confesar	4,0	1,1

- Único EN; no es Pareto Óptimo.
- (Cooper et al 1996): en las últimas 10 de las 20 rondas de juego contra diferentes oponentes, el 78 % de los sujetos eligen No confesar.
- Equilibrio en estrategias dominantes

Proposition

Un equilibrio en estrategias dominantes es un EN.

Ejemplos: Subasta ciega de primer precio

1. n jugadores
2. Valoraciones: $v_1 > v_2 > \ldots > v_n > 0$.
3. Cada jugador envía una oferta (bid) en un sobre cerrado y el objeto es asignado al jugador con el índice más bajo entre aquellos que ofertaron más; el ganador paga su oferta.
4. Hallar A_i, u_i.
5. ¿Un perfil en que cada jugador ofrece v_i en un EN?
6. Hallar EN

Ejemplos: Subasta ciega de segundo precio

1. n jugadores
2. Valoraciones: $v_1 > v_2 > \ldots > v_n > 0$.
3. Cada jugador envía una oferta (bid) en un sobre cerrado y el objeto es asignado al jugador con el índice más bajo entre aquellos que ofertaron más; el ganador paga **la oferta más alta entre los jugadores que no ganaron**.
4. Mostrar que $b_i = v_i$ es una estrategia débilmente dominante.
5. Hallar equilibrios de Nash que no sean eficientes (el objeto no se lo lleva el que más lo valora).

Ejemplos: War of attrition

1. 2 jugadores, 1 objeto.
2. Valoraciones: v_1, v_2.
3. Tiempo es continuo y empieza en 0.
4. Cada jugador elige cuando darle el objeto al otro jugador. Si el primer jugador que lo concede lo hace en el momento t, el otro jugador obtiene el objeto en ese momento Si ambos conceden simultáneamente, el objeto es dividido en partes iguales (cada uno recibe $\frac{v_i}{2}$).
5. El tiempo se valora: hasta que alguno concede el objeto, cada jugador pierde un unidad de pago por unidad de tiempo.
6. Hallar los pagos y los EN.

Correspondencia de mejor respuesta (Best-response correspondence)

Definition

$a_i \in A_i$ es una mejor respuesta del jugador i a las estrategias a_{-i}, si:

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(\tilde{a}_i, a_{-i}) \quad \forall \tilde{a}_i \in A_i$$

Definition

Definimos como $BR_i(a_{-i})$ al conjunto (correspondencia) de mejores respuestas de i al perfil a_{-i} de los otros jugadores. Esto es:

$$BR_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(\tilde{a}_i, a_{-i}) \quad \forall \tilde{a}_i \in A_i\}.$$

Correspondencia de mejor respuesta (Best-response correspondence)

Definition

Un perfil a^* es un EN si $a_i^* \in BR_i(a_{-i}^*)\ \forall\ i \in N$.

Esta fórmula alternativa nos apunta a un método (no necesariamente eficiente) de encontrar EN:

1. calcular la BR_i de cada jugador.
2. encontrar a^* tal que $a_i^* \in BR_i \forall i \in N$.

Si las correspondencias BR_i son funciones, entonces el segundo paso implica resolver $|N|$ ecuaciones en $|N|$ variables.

Ejemplos: Cournot

- Dos empresas compiten en cantidades (q_i).
- Curva de demanda del mercado: $P(q) = 100 - q$ (donde $q = q_1 + q_2$)
- Costo de cada firma: $c(q_i) = 10q_i$ para $i \in \{1, 2\}$

Hallar las funciones de mejor respuesta y el equilibrio de Nash.

Ejemplos: Compartiendo Pizza

A 2 amigos les ofrecen una pizza de 8 porciones bajo la siguiente condición.

Cada uno anuncia cuántas porciones le gustaría comer, y si la suma de los anuncios es menor o igual a 8, obtienen la pizza y se reparte cómo anunciaron; de lo contrario no obtienen nada.

Asumir que cada jugador sólo considera la pizza que él come y que más pizza es mejor.

Hallar las funciones de mejor respuesta y los equilibrios de Nash.

IESDS y EN

Proposition

Sea G un juego, y $b_i \in A_i$ una estrategia estrictamente dominada. Sea $\tilde{G}$ el juego que se obtiene al remover b_i de G. Entonces el conjunto de EN y de G y de $\tilde{G}$ coinciden.

Demostración.

1. Sea a^* un EN de G, entonces a_i^* no está estrictamente dominada (no fue removida)...entonces EN de $\tilde{G}$.
2. Sea a^* un EN de $\tilde{G}$...mostrar que $u(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u(\tilde{a}_i, a_{-i}^*)$ $\forall \tilde{a}_i \in A_i$ en G.

□

Mensaje: al calcular los equilibrios de Nash, siempre es posible primero eliminar una estrategia que está estrictamente dominada.

- Esto facilita encontrar el conjunto de EN
- Ojo: sólo válido cuando A_i finito $\forall i \in N$.

Ejemplos: Esfuerzo en el estudio

Hay n estudiantes en una clase. Simultáneamente cada estudiante elige un nivel de esfuerzo x_i incurriendo en un costo cx_i^2, con $c > 0$.

Cada estudiante i recibe un incremento x_i en su calificación por su esfuerzo, pero también aumenta la curva y disminuye la calificación de cada estudiante en αx_i, con $\alpha > 0$.

Por lo tanto:

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i - \alpha \sum_{j \neq i} x_j - cx_i^2.$$

Hallar un EN; y un perfil Pareto eficiente.