Lista Ejercicios 1: Juegos en forma estratégica: definición y estrategias dominantes

1. (**Cazando**) Dos cazadores, jugadores 1 y 2 pueden elegir entre cazar un ciervo (que les provee de una rica carne), o cazar una liebre (que representa mucho menos carne). Cazar ciervos requiere cierta cooperación entre ellos. Si alguno decide cazar el ciervo solo, entonces el ciervo se ahuyenta, mientras que hacerlo juntos garantiza que lo cazen. Cazar liebres es una tarea individual que no se hace en pareja, y cualquier que decida cazar una liebre, lo logrará. El pago por cazar una liebre es 1, mientras que el pago para cada jugador de cazar un ciervo es 3. El pago de un caza no exitosa es 0.

   Escribir una matriz que represente este juego.

2. (**Provisión de un bien público**) Tres jugadores viven en una ciudad, y cada uno puede elegir si contribuir o no al arreglo de una calle. El valor de tener la calle arreglada es 3 para cada jugador, y el valor de dejarla como está es 0. El intendente de la ciudad le pregunta a cada jugador si quiere contribuir con 1 o no para el arreglo. Si al menos dos jugadores contribuyen, entonces la calle se arregla, de lo contrario queda como está y si alguno contribuyó no recibe su dinero de vuelta.

   Escribir el juego en forma normal.

3. Dos candidatos, 1 y 2, están compitiendo en las elecciones. Cada uno tiene tres posibiles estrategias, concentrarse en los aspectos positivos de su platoforma (campaña positiva, P), concentrarse en los aspectos positivos de su platoforma y atacar al oponente (campaña balanceada, B), o concentrar en atacar al oponente (campaña negativa, N). Cada candidato sólo se interesa por la probabilidad de ganar, entonces, si la probabilidad es $\pi \in [0, 1]$, su pago es π. La probabilidad de ganar está definida de la siguiente forma:

   - si ambos candidatos eligen la misma campaña entonces la probabilidad de ganar es $\frac{1}{2}$,

   - si i elige una campaña positiva, y j una balanceada, i pierde seguro,

   - si i elige una campaña positiva, y j una negativa, i gana con probabilidad 0.3,

- si i elige una campaña negativa, y j una balanceada, i gana con probabilidad 0.6.

  a) Modelar la situación anterior como un juego, y escribirlo en form normal.

  b) Escribir la matriz de pagos.

  c) ¿Tiene algún jugador una estrategia dominante? Usar la eliminación de estrategias estrictamente dominadas para predecir un resultado del juego.

4. (**Eliminación de estrategias débilmente dominadas**) Considere el juego de la Figura 3:

		J 2		
		L	C	R
	T	$1,2$	$2,3$	$0,3$
J 1	M	$2,2$	$2,1$	$3,2$
	D	$2,1$	$0,0$	$1,0$

Figura 1:

Encontrar tres procedimientos distintos de eliminación iterativa de estrategias (débilmente) dominadas que resulten en tres resultados distintos.

5. Considerar el juego de provisión de un bien público.

   a) Hallar la función de mejor respuesta de cada jugador.

   b) ¿Cuáles outcomes pueden ser el resultado de un equilibrio de Nash en estrategias puras?

6. Considerar la "tragedia de los comunes" con n jugadores (Para el caso $n = 2$ ver (Sección 5.2.2, pág. 84 Tadelis).

   Imagina que hay n jugadores (firmas) eligiendo cuánto producir. La producción consume aire limpio, y hay un stock total de aire limpio K, y todo consumo sale de este stock. Cada jugador i elige su consumo de aire limpio para producir, k_i, y por lo tanto el monto de aire limpio después de que cada jugador eligió es: $K-\sum_{i=1}^{n} k_i$. El pago de consumir

k_i para el jugador i, es $ln(k_i)$, Cada jugador tiene también un pago por lo que queda de aire limpio igual a $ln(K - \sum_{i_1}^{n} k_i)$. Por lo tanto, la función de pagos del jugador i es:

$$u_i(k_i, k_{-i}) = ln(k_i) + ln\left(K - \sum_{i_1}^{n} k_i\right).$$

a) Encontrar los equilibrios de Nash del juego en estrategias puras. *Sugerencia: encontrar primero un equilibrio simétrico y luego probar que no existe un equilibrio en el cual dos jugadores consuman cantidades distintas.* ¿Cómo afecta n al outcome en el equilibrio de Nash?

b) Encontrar el óptimo social. ¿Cómo afecta n este outcome?

7. Para cada uno de los siguientes juegos determinar si el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas resulta en un único vector de estrategias. Si es así, ¿cuál es dicho vector? y verificar que el vector es el único equilibrio de Nash en estrategias puras.

J 1 \ J 2	L	R
T	$4,2$	$0,1$
D	$1,1$	$3,3$

J 1 \ J 2	L	R
T	$1,3$	$2,3$
D	$0,4$	$0,2$

Figura 2:

J 1 \ J 2	L	C	R
T	$1,0$	$3,0$	$2,1$
M	$3,1$	$0,1$	$1,2$
D	$2,1$	$1,6$	$0,2$

Figura 3:

8. (Roommates problem) Supongamos que n amigos viven juntos en una misma casa. Cada uno de ellos tiene 5 horas de su tiempo libre que puede dedicar como máximo a la limpieza. Obviamente a nadie le gusta

limpiar, por lo que el pago de cada amigo es el total de horas que todos destinan a la limpeza (él incluido) menos una constante c por las horas que él destino a la limpieza. Por lo tanto, la función de pagos de i es:

$$\upsilon_i(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{j=1}^{n} s_j - cs_i$$

a) Encontrar el equilibrio si $c < 1$.

b) Encontrar el equilibrio si $c > 1$.

c) Si $n = 5$ y $c = 2$, ¿Es el equilibrio de Nash Pareto eficiente? Si la respuesta es negativa, encontrar un vector s en el cual todos estén estricatemente mejor que en el equilibrio de Nash.

9. Encontrar un juego con al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras, y que el proceso de eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas resulte en un juego sin equilibrios.

10. Probar que si en un juego cada jugador i tiene una estrategia s_i^* que domina **estrictamente** todas sus otras estrategias, entonces el vector de estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es el único equilibrio del juego.

11. Una estrategia estrictamente dominada puede ser parte de un equilibrio de un juego?, ¿y si la estrategia es débilmente dominada? Justificar

12. En el siguiente juego, el jugador 1 elige una de las filas, el jugador 2 una de las columnas y el tres una de las tres matrices. El vector de pagos tiene primer el pago del jugador 1, luego del 2 y por último del 3. Encontrar los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego. ¿El outcome de algún equilibrio de Nash es Pareto Óptimo?

	L	R
T	$0,0,3$	$0,0,0$
B	$1,0,0$	$0,0,0$

X

	L	R
T	$2,2,2$	$0,0,0$
B	$0,0,0$	$2,2,2$

Y

	L	R
T	$0,0,0$	$0,0,0$
B	$0,1,0$	$0,0,3$

Z

Figura 4: Un juego con tres jugadores, en el cual el jugador 3 elige X, Y o Z.

(28 de junio de 2023)