Tema 3: Estrategias racionalizables y IESDS

Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2023

EN y creencias correctas

- EN: concepto de solución para juegos estratégicos en los que se requiere que la elección de cada jugador sea óptima dada su creencia sobre el comportamiento de los otros jugadores.
- Una creencia que se exige que sea correcta.
- Es decir, asumimos que cada jugador conoce el comportamiento de equilibrio de los otros jugadores.
- Si los jugadores participan repetidamente en la situación que el juego modela, entonces pueden obtener este conocimiento a partir del steady state que observan.
- Sin embargo, si el juego es un evento único en el que todos los jugadores eligen sus acciones simultáneamente, entonces no está claro cómo cada jugador puede conocer las acciones de equilibrio de los otros jugadores.

Estrategias racionalizables

- Ahora estudiamos algunos conceptos de solución en los que las creencias de los jugadores sobre las acciones de los demás no se asumen como correctas, sino que se limitan por consideraciones de racionalidad.
- Un jugador es *racional* si maximiza sus pagos dada una creencia sobre las acciones de los otros
- Cada jugador cree que las acciones tomadas por cada otro jugador es la mejor respuesta a alguna creencia, y, además, cada jugador asume que todos los otros jugadores razonan de esta manera y, por lo tanto, ellos piensan que cada acción de otro jugador es la mejor respuesta a alguna creencia, y así sucesivamente.

Definition

Un creencia del jugador i (sobre las acciones de los otros jugadores) es una distribución de probabilidad sobre $A_{-i} = \times_{j \in N \setminus \{i\}} A_j$

Observar que no descartamos creencias con acciones correlacionadas.

Estrategias racionalizables

Una acción $a_i \in A_i$ es una mejor respuesta a una creencia si no hay ninguna otra acción del jugador i que le de un mayor pago dada la creencia. Esto es:

Definition

Dado un creencia μ_i, a_i es una mejor respuesta a μ_i si:

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \mu_i(a_{-i}) u_i(a_i, a_{-i}) \geq \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \mu_i(a_{-i}) u_i(\tilde{a}_i, a_{-i}) \text{ para todo } \tilde{a}_i \in A_i.$$

Ejemplos:

		J2	
		Q	F
J1	Q	2,2	0,3
	F	3,0	1,1

F es la única acción racional

		J2	
		Q	F
J1	Q	3,2	0,3
	F	3,0	1,1

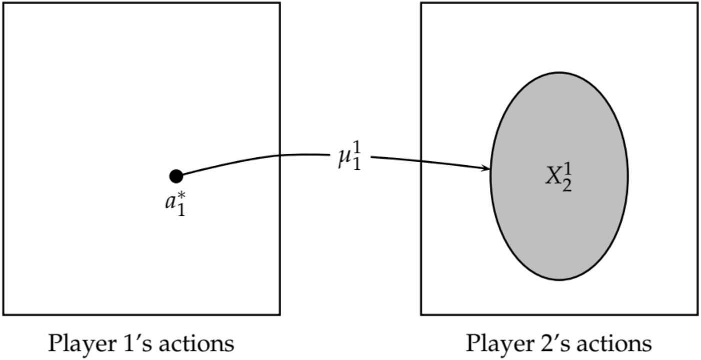
Q y F son racionales. ¿Pero son las creencias razonables?

Ejemplo

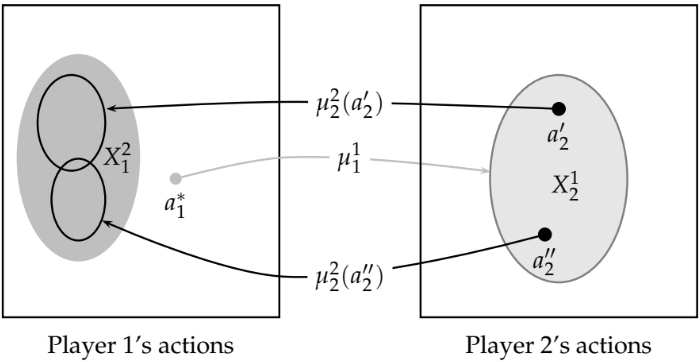
En otros juegos, el resultado no se restringe sustancialemente al suponer que la acción de cada jugador es racional, y que su creencia es consistente con la racionalidad del otro jugador.

		J2	
		Q	F
	Q	4,2	0,3
J1	X	1,1	1,0
	F	3,0	2,2

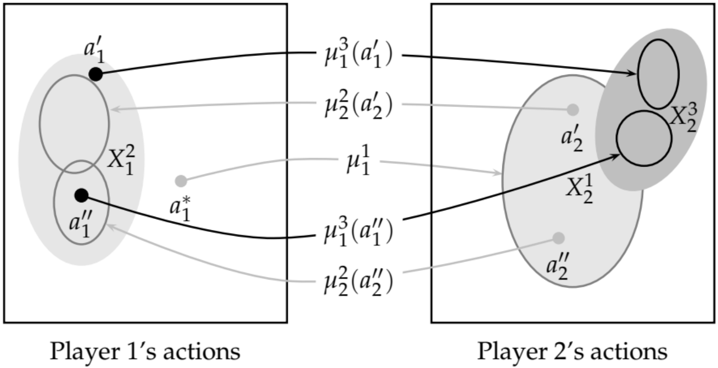
Ejemplo: Juego con dos jugadores



Ejemplo: Juego con dos jugadores



Ejemplo: Juego con dos jugadores



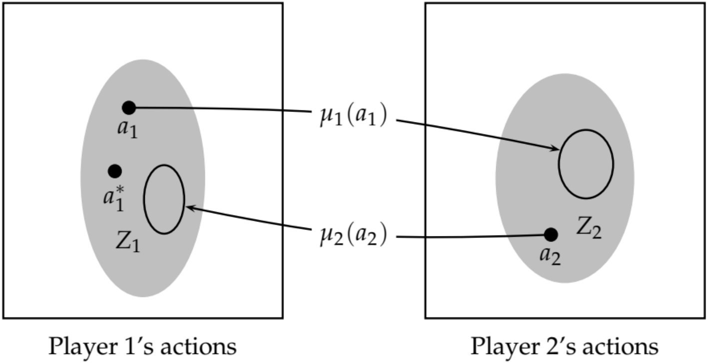
Definición

Definition

Una acción $a_i \in A_i$ es racionalizable si para cada jugador $j \in N$ existe un conjunto $Z_j \subset A_j$ tal que:

- $a_i \in Z_i$
- cada acción $a_j \in Z_j$ es una mejor respuesta a una creencia $\mu_j(a_j)$ del jugador j cuyo soporte es un subconjunto de Z_{-j}.

Definición



a_1
a_1^*
Z_1
$\mu_1(a_1)$
$\mu_2(a_2)$
Z_2
a_2
Player 1's actions
Player 2's actions

Estrategias racionalizables y EN

Proposition

Toda acción usada con probabilidad positiva en algún equilibrio de Nash es racionalizable.

Demostración.

Idea: dado un EN σ^*, defina para cada i, $Z_i = \{a_i \mid \sigma_i^*(a_i) > 0\}$... $\square$

Estrategias racionalizables y EN

El recíproco no es cierto:

		L	C	R
		2		
	T	0,7	2,5	7,0
1	M	5,2	3,3	5,2
	B	7,0	2,5	0,7

(M, C) es el único EN y no hay un EN en mixtas que asigne probabilidad en más de una acción. Sin embargo, cada acción es racionalizable.

Concepto de solución más débil que EN: a veces no descartamos ningún perfil.

Nunca mejor respuesta

Encontrar los conjuntos Z_i para encontrar estrategias racionalizables puede ser complicado, veamos una alternativa...

Definition

Una estrategia a_i para el jugador i es una nunca mejor respuesta (*never-best response*) si no existen creencias del jugador i tal que a_i es una mejor respuesta. Formalmente, para toda μ_i $\exists$ σ_1 tal que:

$$\sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \mu_i(a_{-i}) U_i(\sigma_1, a_{-i}) > \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} \mu_i(a_{-i}) u_i(a_i, a_{-i})$$

Remark

Una nunca mejor respuesta no es racionalizable (por definición).

Definition

Una estrategia a_i está estrictamente dominada si existe una estrategia mixta σ_i tal que $U_i(a_i, a_{-i}) < U_i(\sigma_i, a_{-i})$ $\forall a_{-i}$.

IESDS y estrategias racionalizables

Lemma

Una estrategia para un jugador es una nunca mejor respuesta si, y sólo si, está estrictamente dominada.

Demostración.

($\Leftarrow$) *Obvio, para cualquier creencia...* $\square$

Recordar: el procedimiento iterativo de eliminación de estrategias estrictamente dominadas consiste en buscar una estrategia estrictamente dominada de una jugador (posiblemente por una mixta), eliminarla y nuevamente buscar una estrategia estrictamente dominada de una jugador. El procedimiento se detiene cuando no haya ninguna estrategia dominada para ningún jugador.

Observación: el resultado de IESDS no depende del orden en que se eliminen las estrategias dominadas.

IESDS y estrategias racionalizables

Resultado útil para encontrar estrategias racionalizables:

Theorem

Para todo juego tal que cada jugador tiene un número finito de estrategias, el conjunto de perfiles de estrategias que sobrevive el procedimiento iterativo de eliminación de estrategias estrictamente dominadas es igual al conjunto de perfiles racionalizables.

Ejemplo: Beauty contest

Juego:

- Espacio de estrategia: cualquier número en $\{1, 2, .., 100\}$.
- La persona cuyo número es más cercano a $2/3$ de la media de la clase gana.
- Si hay empate se divide el premio.

Hallar las estrategias razionalizables.

Evidencia empírica del juego:

- Rubinstein (1998/9): el número de ganadores fue 19 en 1998 y 23 en 1999.
- Nagel (1995): 24, y el gran experimento de Thaler (1998) con los lectores del Financial Times obtuvo un resultado de 13.