

Tema 4: Juegos dinámicos con información perfecta

Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2023

Juegos en forma extensiva

Un juego extensivo es una descripción explícita de la estructura secuencial que enfrentan los jugadores en una situación estratégica.

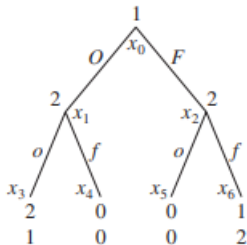
Este modelo nos permite estudiar soluciones en las que cada jugador puede considerar su plan de acción no solo al comienzo del juego sino también en cualquier momento en el que tenga que tomar una decisión.

Por el contrario, el modelo de un juego estratégico nos limita a soluciones en las que cada jugador elige su plan de acción de una vez para siempre; este plan puede cubrir contingencias ilimitadas, pero el modelo del juego estratégico no permite a un jugador reconsiderar su plan de acción después de que algunos eventos en el juego suceden.

Juegos en forma extensiva

Componente de un juego extensivo:

- N : conjunto finito de jugadores; la naturaleza es jugador $0 \in N$.
- **Árbol**: orden de movimientos.
- Pagos para cada jugador en los nodos terminales.
- Partición de la información.
- Acciones disponibles en cada conjunto de información.
- Descripción de cómo las acciones conducen al progreso en el árbol.
- Movimientos aleatorios de la naturaleza.



Árbol del juego

- $(X, >)$: árbol
- X : conjunto de nodos
- $x > y$: nodo x precede nodo y
- $x_0 \in X$: nodo inicial, $x_0 > x \forall x \in X \setminus \{x_0\}$
- $>$ transitiva ($x > y, y > z, \Rightarrow x > z$), y asimétrica $x > y \Rightarrow y \not> x$
- Cada nodo $x \in X \setminus \{x_0\}$ tiene un predecesor inmediato: $\exists \tilde{x} > x$ t.q. $\forall \hat{x} > x$
 $y \hat{x} \neq \tilde{x} \Rightarrow \hat{x} > \tilde{x}$
- $Z = \{z \mid \nexists x, z > x\}$: conjunto de nodos terminales
- $z \in Z$ determina un único camino de movimientos a lo largo del árbol
- pagos $u_i(z)$ para cada jugador i
- Cada nodo $x \notin Z$ es asignado a un jugador $i(x)$ con el conjunto de acciones posibles $A_i(x)$

Partición de la información

- Cada jugador i tiene una colección de conjuntos de información $h_i \in H_i = \{h_i \mid i(h) = i\}$ que particionan los nodos del juego en que mueve el jugador i con las siguientes propiedades:
 - ▶ Si h_i es un único elemento x entonces el jugador i que mueve en x sabe que está en x .
 - ▶ Si $x \neq \hat{x}$ y $x, \hat{x} \in h_i$, entonces el jugador i que mueve en x no sabe si está en x o en \hat{x} .
 - ▶ Si $x \neq \hat{x}$ y $x, \hat{x} \in h_i$ entonces $A_i(x) = A_i(\hat{x})$.

Juegos con información perfecta/imperfecta

Definimos juegos de información completa como la situación en la que cada jugador conoce el conjunto de acciones y la función de pago de cada uno de los jugadores, y esto es conocimiento común.

Definition

Un juego de información completa en el que cada conjunto de información es un único elemento y no hay movimiento de la naturaleza se llama **juego de información perfecta**.

Un juego en el cual algunos conjuntos de información contienen varios nodos o en el que hay movimientos de la naturaleza se llama un **juego de información imperfecta**.

Estrategias

- $A_i(h_i)$: conjunto de acciones que puede tomar i en el conjunto de información h_i .
- $A_i = \cup_{h_i \in H_i} A_i(h_i)$: el conjunto de todas las acciones.

Definition

Una **estrategia pura** del jugador i es una función $s_i : H_i \rightarrow A_i$ que asigna la acción $s_i(h_i) \in A_i(h_i) \forall h_i \in H_i$.

Denotamos como S_i es conjunto de todas las estrategias.

Definition

Una **estrategia mixta** del jugador i es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias puras $s_i \in S_i$.

Ejemplo: halle el conjunto S_i de cada jugador en la batalla de los sexos secuencial.

Behavioral strategies

Definition

Una **behavioral strategy** especifica para cada $h_i \in H_i$ una distribución de probabilidad independiente sobre $A_i(h_i)$ y se denota por $\sigma_i : H_i \rightarrow A_i(h_i)$, donde $\sigma_i(a_i(h_i))$ es la probabilidad de que el jugador i juegue la acción $a_i(h_i) \in A_i(h_i)$

¿Es cada estrategia mixta equivalente a una behavioral strategy?

Si, bajo el supuesto de *perfect recall* (recuerdo perfecto).

Representación estratégica de un juego extensivo

La representación en forma estratégica del juego en forma extendida es el juego de forma normal definido por $\langle N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$.

Definition

Un perfil de estrategia mixtas es un equilibrio de Nash del juego en forma extendida si constituye un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de su forma estratégica.

Para encontrar los EN de un juego extendido podemos usar la representación en forma estratégica y procedemos como antes...

EN y racionalidad secuencial

La solución EN no permite descartar equilibrios basados en “amenazas no creíbles”.

Insistiremos en que un jugador use estrategias que son óptimas en cada conjunto de información del árbol del juego.

Este principio se llama **racionalidad secuencial**, porque implica que los jugadores están jugando racionalmente en cada etapa de la secuencia del juego, ya sea adentro o fuera del camino de equilibrio del juego.

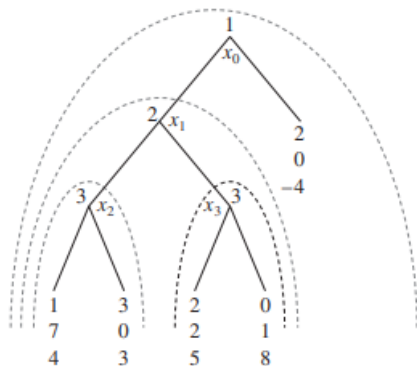
Definition

Dadas las estrategias $\sigma_{-i} \in S_{-i}$ de los oponentes de i , decimos que σ_i es **secuencialmente racional** si y sólo si i está jugando una mejor respuesta a σ_{-i} en cada uno de sus conjuntos de información.

Subjuego

Definition

Un subjuego G de un juego de forma extensiva Γ consiste en un sólo nodo y todos sus sucesores, con la propiedad de que si $x \in G$ y $\hat{x} \in h(x)$ entonces $\hat{x} \in G$. El subjuego G es en sí mismo un árbol de juego con sus conjuntos de información y pagos heredados de Γ .



Equilibrio perfecto por subjuegos (SPE)

Definition

Sea un juego en forma extensiva de n jugadores. Un perfil de behavioral strategies $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio (Nash) perfecto por subjuegos (SPE) si para cada subjuego G de Γ , la restricción de σ^* a G es un equilibrio de Nash en G .

Inducción hacia atrás

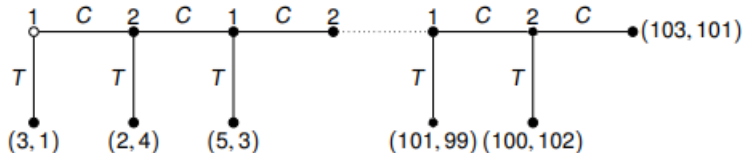
Podemos encontrar los SPE usando inducción hacia atrás en cada subjuego.

Theorem (Zermelo-Kuhn)

Todo juego extensivo con información perfecta tiene un SPE.

Ejemplo: Ciempiés

El jugador 1 tiene dos pilas delante de ella: una contiene 3 monedas, la otra 1. El jugador 1 puede tomar la pila más grande y darle la más pequeña al jugador 2 (T), o empujar ambas pilas a través de la mesa al jugador 2 (C). Cada vez que las pilas pasan por la mesa, se agrega una moneda a cada una. Los jugadores alternan en la elección de tomar la pila más grande (T) o confiar en el oponente con pilas más grandes (C). El juego dura 100 rondas



Hallar SPE y EN que no sea un SPE.

Ejemplo: Ciempiés

Palacios-Huerta y Volij (2009)

- Los jugadores de ajedrez y los estudiantes universitarios se comportan de manera diferente en el juego de ciempiés.
- Los jugadores del ajedrez más altos terminan el juego antes.
- Todos los Grandes Maestros en el experimento se detuvieron en la primera oportunidad.
- Los jugadores de ajedrez están familiarizados con el razonamiento de inducción hacia atrás y necesitan menos aprendizaje para alcanzar el equilibrio.
- Al jugar contra los no jugadores de ajedrez, incluso los jugadores de ajedrez continúan en el juego por más tiempo.
- En juegos largos, el conocimiento común de la capacidad de hacer razonamiento inductivo complicado se vuelve importante para la predicción.

Ejemplo: Fijador de agenda

Fijador de agenda. Dos jugadores: un fijador de agenda y el legislativo. Espacio de política: $X = [0, 5]$, y status quo $q = 4$. El fijador de agenda juega primero proponiendo una alternativa $x \in X$ al status quo. Luego, el legislativo observa la propuesta y selecciona entre la propuesta y el status quo. Pagos:

$$v_1(y) = 10 - |y - 1|$$

$$v_2(y) = 10 - |y - 3|,$$

donde $y \in X$ es la política implementada.

Hallar un SPE, y un EN que no sea un SPE.

Ejemplo: Stackelberg competition

Dos firmas compiten en un mercado con función inversa de demanda:

$P = 100 - (q_1 + q_2)$. Costos: $c_i(q_i) = 10q_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

Firma 1 decide q_1 , y luego firma 2 observa q_1 y elige q_2 .

Hallar SPE, escribir el perfil de estrategias con cuidado.