Tema 5: Juegos extensivos de información imperfecta y Multistage games

Teoría de juegos

Luis Frones (dECON)

2023

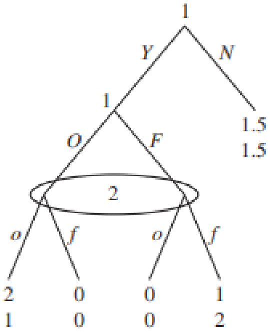
Juegos extensivos de información imperfecta

Un juego en el cual algunos conjuntos de información contienen varios nodos o en el que hay movimientos de la naturaleza se llama un **juego de información imperfecta**.

Por ejemplo, $h_i = \{x_1, x_2\}$ para algun $i \in N$. Recordar que $A_i(x_1) = A_i(x_2)$ (mismas acciones disponibles en cada nodo de h_i), y el jugador i no sabe si está en el nodo x_1 o x_2

Ejemplo: BoS voluntario

En el árbol de abajo, las acciones $\{O, o\} = B$(ach) y $\{F, f\} = S$(travisnky). Las mayúsculas son las elecciones del J1, y minúsculas del J2. Y(es), N(o) refiere a si el J1 quiere jugar BoS.



Hallar los SPE y NE del juego.

Multistage games

Introducción

- Los juegos de forma extensiva analizados hasta ahora se caracterizaron por tener pagos que se obtienen una vez el juego alcanza un nodo terminal.
- En realidad, un juego dinámico puede ser más complejo, y puede no ser modelado correctamente por un juego “grande”que se va desarrollando en el tiempo con pagos distribuidos al final del juego.
- Los jugadores pueden jugar un juego que es seguido por otro (o quizás incluso varios otros juegos) y recibir algunos pagos después de cada uno de los juegos en esta secuencia.
- En estos casos surgen dos preguntas naturales:
    1. si los jugadores son racionales y miran hacia adelante, ¿no deberían ver esta secuencia de juegos como un juego grande?
    2. si ellos ven esto como un juego grande, ¿deberíamos esperar que sus acciones en las etapas posteriores dependerán de los resultados de las fases anteriores?

Definición

1. Un multistage game es una sucesión de juegos, en la cual cada juego es un juego independiente con información completa e imperfecta (un juego simultáneo).
2. Estos juegos de cada etapa se juegan de forma secuencial por los mismos jugadores, y los pagos totales de la secuencia de juegos se evalúan utilizando la sequencia de resultados en los juegos que se jueguen.
3. Asumiremos que, después de completar cada etapa, todos los jugadores observan el resultado de esa etapa, y que esta estructura de información es conocimiento común.
4. Pagos. Existe un factor de descuento $\delta \in [0, 1]$. Valores mayores de δ implica jugadores más pacientes.
5. Supongamos un multistage game con T períodos, en el cual en cada período t, v_i^t es el pago del jugador i en el juego t, entonces definimos como el pago total del jugador i:

$$v_i = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} v_i^t.$$

Ejemplo: dilema del prisionero con revancha

$T = 2$.

En $t = 1$:

		2	
		m	f
1	M	4,4	-1,5
	F	5,-1	1,1

En $t = 2$:

		2	
		l	g
1	L	0,0	-4,-1
	G	-1,-4	-3,-3

Estrategias

En general, en un multistage game que consiste en T stage-games, una estrategia del jugador i es una lista de estrategias puras condicionales de la siguiente forma:

$$S_i = \{s_i^1, s_i^2(h_1), \ldots, s_i^t(h_{t-1}), \ldots, s_i^T(h_{T-1})\},$$

donde $s_i^t(.)$ es una función desde el conjunto H_{t-1} al conjunto de acciones posibles del jugador i en el stage-game t, con H_{t-1} siendo el **conjunto** de todos los resultados que pueden ocurrir hasta el período t, sin incluirlo.

Esto es, la función $s_i^t(.)$ nos dice, para cada historia hasta $t-1$ una acción a tomar en t. Distintas estrategias involucran distintas funciones.

Definir las estrategias de cada jugador en el ejemplo anterior.

Equilibrios "miopes"

Proposition

Consideremos un multistage game con T stages, y sea σ^{t*} un equilibrio de Nash en el juego t. Entonces existe un SPE en un multistage game en el cual el path de equilibrio coincide con el path generado por $\sigma^{1*}, \sigma^{2*}, \ldots, \sigma^{T*}$.

Demostración.

Considerar la estrategia no condicional de cada jugador i: en cada $t \in \{1, 2, ...T\}$ juego σ_i^{t*} (lo que el EN prescribe para mi) sin importar la historia. Luego en T jugar σ_i^{t*} es la mejor respuesta $\forall h_{T-1} \in H_{T-1}$, y luego también en $T - 1$... $\square$

Equilibrios “miopes”

La proposición dice que si miramos una secuencia de estrategias que es un EN en cada juego de forma independiente, entonces los jugadores deben estar contentos con esas estrategias en cada etapa.

Al considerar tales estrategias no condicionales, estamos eliminando cualquier vínculo estratégico entre las etapas, y por lo tanto cada etapa puede ser tratada como si fuera un juego independiente.

Ver en el ejemplo estos equilibrios

¿Podemos hacerlo mejor?

La pregunta que queda por responder es si estamos ignorando un comportamiento que sea SPE si usamos un vínculo estratégico entre los juegos.

En otras palabras, si los jugadores condicionaran sus estrategias futuras en función del pasado de una manera secuencialmente racional, ¿seríamos capaces de tener un SPE con estrategias en las etapas tempranas que no sean EN en esas etapas?

Proposition

Sea σ^* un EN del multistage game que consiste en stage-games $G_1, G_2, \ldots, G_T$. Entonces la restricción de σ^* en el stage game del período T debe ser un EN del stage-game G_T.

Si σ^* es un EN, entonces en el último período los jugadores deben jugar un EN del stage-game.

Restricción

Proposition

En un multistage game **finito** compuesto por stages-games cada uno con un **único** equilibrio de Nash, entonces el multistage game tiene un único SPE.

Entonces no podemos hacer mucho cuando tenemos sólo un EN en cada etapa.

Pero si podemos si tenemos más de uno...

Ampliando el conjunto de equilibrios

En el ejemplo anterior, ¿podemos sostener el resultado (outcome) (M, m) en $t = 1$ como parte de un SPE?

Ampliando el conjunto de equilibrios II

Dos requerimientos para aplicar el razonamiento anterior.

1. Múltiples EN en el último stage-game (uno “bueno” y otro ”malo”)
2. Un factor de descuento δ lo suficientemente alto.

Construir una estrategia que “soporte” en SPE un resultado (F, m) en el primer período.

Ejemplo

Consideremos dos firmas que primero juegan un juego de Cournot para fijar los cantidades, cada una tiene costos $c_i(q_i) = 10q_i$. La demanda de mercado es $p(q_i) = 100 - (q_1 + q_2)$. El segundo stage game es:

		2: a	2: b
1	A	100,100	0,0
1	B	0,0	300,300

1. Hallar EN de cada uno de los stage-game.
2. ¿Cuáles son los outcomes simétricos y Pareto óptimos de cada stage game?
3. ¿Para qué valores de δ podemos sostener el outcome Pareto óptimo como SPE?
4. Supongamos $\delta = 0{,}5$. ¿Cuál es el "mejor" SPE simétrico que los jugadores pueden sostener?
5. ¿Qué pasa con el mejor SPE que los jugadores pueden sostener cuando δ tiende a cero?