Lista Ejercicios 2: Algunas soluciones

1. Hay dos equilibrios en estrategias puras: (h, d) y (d, h). Existe un equilibrio en mixtas en el cual cada jugador juega h con probabilidad $\frac{V}{C}$ y d con probabilidad $1 - \frac{V}{C}$.

4.Sea $\sigma_i = (\sigma_{i0}, \sigma_{i1}, 1 - \sigma_{i0} - \sigma_{i1})$ la estrategia mixta del jugador i (con σ_{ij} la probabilidad que i jugue la acción j). Como el juego es simétrico es suficiente resolver las condiciones de indiferencia para un sólo jugador. Para el jugador i, estar indiferente entre 0 y 1 requiere:

$$1.5\sigma_{j0} = 2\sigma_{j0} + 0.5\sigma_{j1} - 1(1 - \sigma_{j0} - \sigma_{j1})$$

y para estar indiferente entre 0 y 2:

$$1.5\sigma_{j0} = \sigma_{j0} + \sigma_{j1} - 0.5(1 - \sigma_{j0} - \sigma_{j1})$$

Resolviendo obtenemos $\sigma_{j0} = \sigma_{j1} = \sigma_{j2} = \frac{1}{3}$, y por tanto el único equilibrio tiene a los 2 jugadores jugando cada estrategia con igual probabilidad.

5. R para el jugador 2 está estrictamente dominada por la estrategia mixta que asigna probabilidad p a L y probabilidad $1-p$ a C, con p tal que $\frac{1}{6} < p < \frac{1}{3}$. Entonces podemos eliminar R del juego. En el juego reducido, G está dominada por T. En el juego que se obtien al eliminar B, L es dominada por C. Entonces, la única estrategia racionalizable para el jugador 1 es T y la única para el 2 es C.

6.

a) Primero vamos a probar que un perfil (k, k, k) con $k \geq 2$ no es un EN. Para ello, consideremos el desvío a $(k-1)$ de un jugador (acá usamos que $k \geq 2$, de lo contrario este desvío no es factible). En el perfil (k, k, k), el pago que obtiene cada jugador es $\frac{1}{3}$. Para que el desvío sea rentable, entonces el jugador debe ganar, para lo cual la distancia entre $(k-1)$ y los $2/3$ del promedio tiene que ser menor que la distancia entre k y los $2/3$ del promedio:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{k-1+k+k}{3}\right) - (k-1) < k - \frac{2}{3}\left(\frac{k-1+k+k}{3}\right),$$

lo que se cumple sii:

$$k > \frac{5}{6}.$$

Como $k \geq 2$ entonces la condición anterior es cierta.

Segundo, vamos a probar que el perfil $(1,1,1)$ es un EN. Consideremos el desvío de un jugador a k. Para que el desvío sea rentable, se debe cumplir que (claramente $k > 1$ y menor que $2/3$ del promedio):

$$k - \frac{2}{3}\left(\frac{k+1+1}{3}\right) < \frac{2}{3}\left(\frac{k+1+1}{3}\right) - 1,$$

lo cual se cumple si $k < -\frac{1}{5}$, que claramente no es posible.

b) Primero vamos a probar que un perfil de la forma (k^*, k_1, k_2) con $k^* > k_1 \geq k_2$, no es un EN. Los $2/3$ del promedio son:

$$a = \frac{2}{3}\left(\frac{k^* + k_1 + k_2}{3}\right) = \frac{2}{9}(k^* + k_1 + k_2).$$

Si $k_1 > a$ entonces k^* está más lejos que k_1 y por lo tanto el jugador que eligió k^* pierde y tiene incentivos a desviarse.
Si $k_1 < a$, calculamos las respectivas distancias:

$$k^* - a = \frac{7}{9}k^* - \frac{2}{9}k_1 - \frac{2}{9}k_2,$$
$$a - k_1 = \frac{2}{9}k^* - \frac{7}{9}k_1 + \frac{2}{9}k_2$$

Restando se obtiene:

$$k^* - a - (a - k_1) = \frac{5}{9}k^* + \frac{5}{9}k_1 - \frac{4}{9}k_2 > 0,$$

por lo que k^* está más lejos que k_1 y por lo tanto el jugador que eligió k^* pierde y tiene incentivos a desviarse
Segundo, consideremos un perfil (k^*, k^*, k) con $k^* > k$. Se tiene que:

$$a = \frac{4}{9}k^* + \frac{2}{9}k.$$

Calculamos:

$$k^* - a = \frac{5}{9}k^* - \frac{2}{9}k,$$
$$a - k = \frac{4}{9}k^* - \frac{7}{9}k.$$

Restando obtenemos:

$$k^* - a - (a - k_1) = \frac{1}{9}k^* + \frac{5}{9}k > 0,$$

por lo que k^* está más lejos que k y por lo tanto uno de los jugadores que eligió k^* tiene incentivos a desviarse.

c) La única estrategia racionalizable para cada jugador es 1. Observar que anunciar K está estrictamente dominado por anunciar 1. Por lo tanto, podemos eliminar la estrategia K para cada jugador. Luego, $K-1$ está estrictamente dominado por anunciar 1. Eliminamos la estrategia. Continuando de esta forma, sólo sobrevivve 1.

10 de julio de 2023