Lista Ejercicios 5b: Soluciones

1. (a) Payoff of the strategy: $\frac{4}{1-\delta}$. A player who deviates gets 5 instead of 4 in the period of deviation, but then gets 0 thereafter. Then we need $\delta \geq \frac{1}{5}$.
   (b) Payoff of the strategy: $\frac{6}{1-\delta}$. A player who deviates gets 8 instead of 6 in the period of deviation, but then gets 0 thereafter using grim trigger. Then we need $\delta \geq \frac{1}{4}$.

2. (a) Trivial.
   (b) Jugar incondicionalmente L no es parte de un equilibrio de Nash ya cada jugador tiene incentivos a desviarse y jugar H.
   (c) Jugar incondicionalmente H es un equilibrio de Nash ya que la mejor respuesta de cada jugador cuando el otro juega H es jugar H.

   (d) El pago en equilibrio es 5. Hay que verificar que no hay incentivos a desviarse. Por lo tanto, suponer que el J1 sigue la estrategia y ver los incentivos del J2. Cuando se desvía el outcome del juego es (L,H). En el siguiente período el J1 va a jugar H. Entonces, la mejor respuesta del jugador 2 a esto es jugar H. Por lo tanto, el outcome es siempre (H,H). Para que sea un NE se debe verificar:
   $$5 \geq 8(1-\delta) + 4\delta$$
   O lo que es equivalente: $\delta \geq \frac{3}{4}$

   (e) Para ver que no es un SPE, basta con encontrar una historia donde desviarse en un sólo período de mayores pagos. Tomemos el subjuego que empieza luego de (L,H), y supongamos que J2 juega la estrategia propuesta. Si J1 juega la estrategia propuesta (H,.) obtiene un pago de:
   $$8 + \frac{\delta 4}{1-\delta}$$
   Y si desvía en el primer peirodo (lo perdona) y luego continua con la estrategia propuesta, obtiene 5. Por tanto desviarse da mayores pagos si $\delta > \frac{3}{4}$, contradciendo la condición hallada en *d*).

   Con la modificación propuesta, bajo la estrategia J1 obtiene 4 en este subjuego, y si se desvía:
   $$4 + \frac{\delta 1}{1-\delta}$$
   Y por tanto desviarse no es rentable. El subjuego que empieza en (L,L) es igual que en *d*). Chequendo los otros subuegos, vemos que es SPE.

(f) Veamos las condiciones para que sea SPE viendo desviaciones one-shot de J1 en cada subjuego, fijando que J2 juega *tit-for-tat*.

En el subjuego que comeiza luego de (L,L): Bajo *tit-for-tat* obtiene 5, si se desvía en el primer período y luego vuelve a *tit-for-tat* obtiene:

$$(1-\delta)\left(\frac{8}{1-\delta^2}+\frac{\delta}{1-\delta^2}\right)=\frac{8+\delta}{1+\delta}$$

Y por tanto prefiere *tit-for-tat* si $\delta \geq \frac{3}{4}$

En el subjuego que comienza luego de (L,H): Bajo *tit-for-tat* obtiene:

$$(1-\delta)\left(\frac{8}{1-\delta^2}+\frac{\delta}{1-\delta^2}\right)=\frac{8+\delta}{1+\delta}$$

Si se desvía a (L,.) y luego vuelve a *tit-for-tat*, obtiene 5. Y por tanto prefiere *tit-for-tat* si $\delta \leq \frac{3}{4}$

En el subjuego que comeiza luego de (H,L): Bajo *tit-for-tat* obtiene:

$$(1-\delta)\left(\frac{1}{1-\delta^2}+\frac{\delta 8}{1-\delta^2}\right)=\frac{1+\delta 8}{1+\delta}$$

Si se desvía a (H,.) y luego vuelve a *tit-for-tat*, obtiene 4. Y por tanto prefiere *tit-for-tat* si $\delta \geq \frac{3}{4}$

En el subjuego que comeiza luego de (H,H): Bajo *tit-for-tat* obtiene 4. Si se desvía a (L,.) y luego vuelve a *tit-for-tat*, obtiene

$$(1-\delta)\left(\frac{1}{1-\delta^2}+\frac{\delta 8}{1-\delta^2}\right)=\frac{1+\delta 8}{1+\delta}$$

Y por tanto prefiere *tit-for-tat* si $\delta \leq \frac{3}{4}$

Por tanto, *tit-for-tat* es SPE sólo si $\delta = \frac{3}{4}$.

(g) Consideremos las siguientes estrategias.

J1: jugar L en $t = 1, 3, 5\ldots$ y H en $t = 2, 4, \ldots$ siempre que la historia previa consista en $h = \{(L, H), (H, L), (L, H)\ldots\}$; H en otro caso.

J2: jugar H en $t = 1, 3, 5\dots$ y L en $t = 2, 4, \dots$ siempre que la historia previa consista en $h = \{(L, H), (H, L), (L, H)\dots\}$; H en otro caso.

Notar que si juegan de esta forma, los pagos que obtiene J2 y J1 son respectivamente:
$$(1-\delta)\left(\frac{8}{1-\delta^2}+\frac{\delta 1}{1-\delta^2}\right)=\frac{8+\delta 1}{1+\delta} \text{ y } (1-\delta)\left(\frac{1}{1-\delta^2}+\frac{\delta 8}{1-\delta^2}\right)=\frac{1+\delta 8}{1+\delta}$$
Que cuando $\delta \to 1$ converge a $(4.5, 4.5)$. Veamos que es un SPE para $\delta \sim 1$

Veamos one-shot desviation on-the-path para el J1, fijando que J2 juega esto. En el subjuego que empieza luego de (L,H) J1 obtiene:
$$(1-\delta)\left(\frac{8}{1-\delta^2}+\frac{\delta 1}{1-\delta^2}\right)=\frac{8+\delta 1}{1+\delta}$$
Y si se desvía obtiene:
$$5+\frac{\delta 4}{1-\delta}$$
menor a lo propuesto para todo δ cercano a 1. En el subjuego que empieza luego de (H,L) J1 obtiene:
$$(1-\delta)\left(\frac{1}{1-\delta^2}+\frac{\delta 8}{1-\delta^2}\right)=\frac{1+\delta 8}{1+\delta}$$
Y si se desvía obtiene 4, menor a lo propuesto para δ cercano a 1.

En el subjuego que empieza luego de (H,H) (off-the-path), lo mejor que puede hacer J1 es jugar H, ya que el otro siempre juega H.

4) Consideremos las estrategias definidas como en la letra.

En este ejercicio es crucial el principio de una sola desviación. Seguir la estrategia después de una historia que pone al jugador en el estado bueno requiere (no consideramos pagos promedios, pero los cálculos son equivalentes):
$$\frac{3}{1-\delta} \geq 4+\delta 0+\delta^2\frac{3}{1-\delta}.$$
Esto es lo mismo que: $3+\delta 3 \geq 4+\delta 0$, i.e. $\delta \geq 1/3$.

Seguir la estrategia en el estado malo, requiere para el jugador 2,
$$0+\delta\frac{3}{1-\delta} \geq 2+\delta 0+\delta^2\frac{3}{1-\delta},$$
i.e. $0+\delta 3 \geq 2+\delta 0$, por lo tanto $\delta \geq 2/3$.

Para el jugador 1 sólo requiere: $0+\delta 3 \geq 1+\delta 0$, lo que resulta en $\delta \geq 1/3$ nuevamente.

Por lo tanto, si $\delta \geq 2/3$ el perfil de estrategias propuesto es un SPE.

July 18, 2023