

Macar lo que corresponda: Reglamentado Libre

Nombre _____ C.I. _____

Es una prueba con materiales a la vista

ADVERTENCIA: una respuesta sin fundamentación o explicación podrá ser calificada como insuficiente.

Estudiantes reglamentados: Deben realizar los dos ejercicios de la primera parte y uno a elección de la segunda parte. Se califica sobre tres ejercicios. Disponen de una hora y media.

Estudiantes libres: Deben realizar la totalidad del examen. Se califica sobre cuatro ejercicios. Disponen de dos horas.

Primera parte

Ejercicio 1 (2 puntos)

La siguiente matriz representa un juego estático entre el Jugador 1 y el Jugador 2. Los números a la izquierda y a la derecha de cada celda representan los pagos del Jugador 1 y Jugador 2, respectivamente.

		Jugador 2							
		A		B		C		D	
Jugador 1	1	44	50	20	40	70	27	50	27
	2	50	100	75	100	50	28	50	25
	3	75	35	100	75	50	52	55	75
	4	50	29	50	50	80	40	55	100

- 1.1 Determine si los jugadores tienen estrategias débil y estrictamente dominadas e identifíquelas en todos los casos.
- 1.2 Reduzca la matriz mediante la eliminación de estrategias estrictamente dominadas. A partir de la matriz reducida halle el o los equilibrios del juego en estrategias puras. Fundamente su respuesta.

Ejercicio 2 (2 puntos)

La siguiente matriz representa un juego estático entre Jugador 1 y el Jugador 2. Los números entre paréntesis representan las utilidades de los jugadores. El número a la izquierda de la coma es la utilidad de J1 y el de la derecha la de J2.

		Jugador 2	
		B ₁	B ₂
Jugador 1	A ₁	(3, 1)	(2, 2)
	A ₂	(1, 2)	(4, 1)

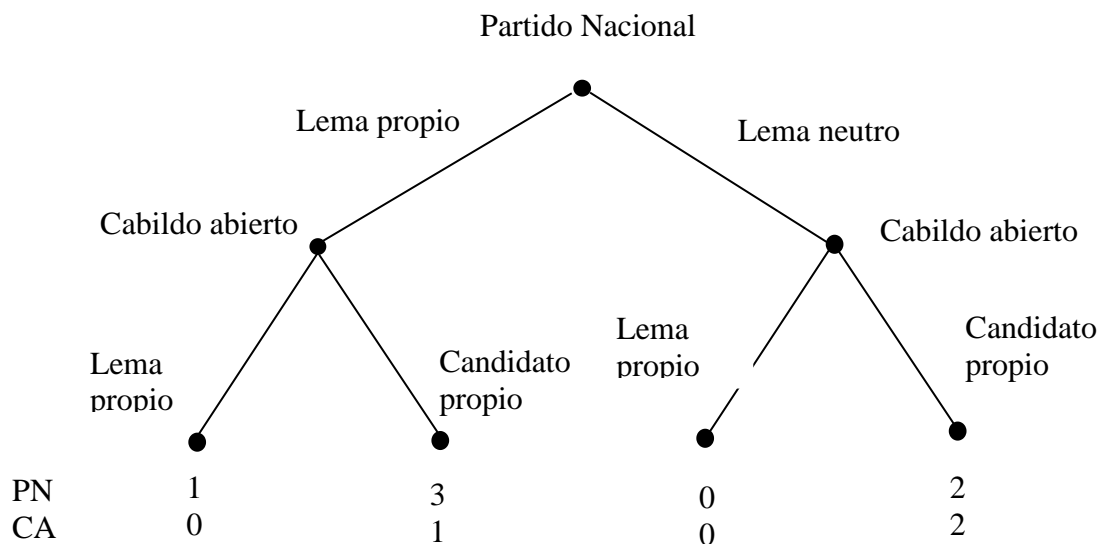
- 2.1 Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias puras e identifíquelos. Justifique.
- 2.2 Determine si la matriz tiene equilibrios de Nash en estrategias mixtas, para lo cual asuma que J1 elije A₁ con una probabilidad p , y que J2 elije jugar B₁ con una probabilidad q . Identifique el EN en estrategias mixtas. Justifique.

Segunda parte

Ejercicio 3 (2 puntos)

El siguiente juego dinámico representa la situación que surge de una nota publicada el 15 de marzo de 2023 En diálogo con la diaria, Guido Manini Ríos dijo que ya se les transmitió a las demás agrupaciones de la coalición de gobierno “que CA no va a ir dentro del lema de otro partido”, y recordó el proceso previo a las elecciones de 2020: “En ocho departamentos del interior fuimos dentro del lema Partido Nacional (PN) y en Montevideo fuimos dentro del lema PI. Eso no lo vamos a repetir, nosotros pretendemos que haya un lema neutro que, por ejemplo, se llame Coalición Republicana, o como le quieran llamar, en el cual vayamos en igualdad de condiciones con los demás partidos”.

En este sentido, Manini planteó que puede haber “un candidato de cada uno de los tres partidos más votados en octubre de 2024; por ejemplo, un blanco, un colorado y un cabildante”. “Si eso no fuera posible porque no se quiere, CA va a ir como CA y punto, como fue en varios departamentos en 2020”, sentenció.



- 3.1. Identifique el resultado por retroinducción. Explique.
- 3.2. Identifique las estrategias de los jugadores y represente la forma normal del juego.
- 3.3. Identifique el o los equilibrios de Nash (en estrategias puras). Explique.
- 3.4. ¿Existe alguna “amenaza vacía” en el o los equilibrios de Nash que identificó? ¿En qué consiste esa amenaza vacía? Fundamente su respuesta.

Ejercicio 4 (2 puntos)

Considere la siguiente situación. Luego de conocerse un hecho de corrupción en un ministerio, el Presidente debe decidir si apoyar al Ministro o pedirle la renuncia. Si el Presidente apoya al Ministro termina el juego con utilidades $(0,1)$, que representa que el Presidente no gana ni pierde nada y el Ministro obtiene una ganancia mínima. Si el Presidente solicita la renuncia del Ministro, el Ministro debe decidir si renuncia o protesta ante el Presidente. Si el Ministro renuncia termina el juego con utilidades $(1,0)$ lo que representa que el Presidente obtiene una ganancia mínima y el Ministro no pierde ni gana nada. Finalmente, si el Ministro no renuncia y protesta ante el Presidente, el Presidente debe decidir si rectifica su decisión y mantiene al Ministro o lo destituye. Si mantiene al Ministro, el juego termina con utilidades $(-1, 2)$ lo que representa que el Presidente sufre una pérdida y el ministro sale fortalecido. En cambio, si destituye al Ministro, el juego termina con utilidades $(2,-1)$ lo que representa que el Presidente sale fortalecido y el Ministro sufre una pérdida.

- 4.1 Diga cuáles son los jugadores del juego y cuáles son sus estrategias.
- 4.2 Represente el juego usando la forma extensiva y determine el resultado por retroinducción
- 4.3 Identifique todos los subjuegos. Explique
- 4.4 Identifique el par de estrategias que conduce al resultado por retroinducción y muestre que se trata de un equilibrio perfecto por subjuegos

Pauta de respuesta

Ejercicio 1

1.1 Para determinar si hay estrategias dominadas empezamos por el Jugador 1. Comparamos sus pagos de a pares de estrategias (para todos los pares). Observamos que la estrategia 3 domina débilmente a 2, y 4 domina estrictamente a 1. Para el Jugador 2, B domina estrictamente a C y no hay estrategias débilmente dominadas.

1.2 Eliminando las estrategias estrictamente dominadas halladas en el punto anterior, llegamos a la siguiente matriz reducida:

		Jugador 2					
		A		B		D	
Jugador 1	2	50	100	75	100	50	25
	3	75	35	100	75	55	75
	4	50	29	50	50	55	100

Volvemos a evaluar la matriz para ver si es posible eliminar más estrategias estrictamente dominadas. Vemos que para el Jugador 1, 3 domina estrictamente a 2, por lo que puede eliminarse esta última. Al haber eliminado la estrategia 2, vemos que para el Jugador 2 B y D dominan estrictamente a A, por lo que eliminamos esta última.

		Jugador 2			
		B		D	
Jugador 1	3	100	75	55	75
	4	50	50	55	100

En este punto ya no es posible seguir reduciendo la matriz mediante la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas. Pasamos entonces a hallar los EN en estrategias puras, marcando las mejores jugadas del Jugador 1 (en verde) y del Jugador 2 (en amarillo). Existen tres combinaciones de mejores respuestas, por lo que hay 3 ENEP en el juego $ENEP = \{(3,B), (3,D), (4,D)\}$ con pagos $\{(100,25), (55,75), (55,100)\}$.

Ejercicio 2

		Jugador 2		
		B ₁	B ₂	
Jugador 1	A ₁	(3 , 1)	(2 , 2)	<i>p</i>
	A ₂	(1 , 2)	(4 , 1)	<i>(1-p)</i>
		<i>q</i>	<i>(1-q)</i>	

2.1 Primero observo que no existen estrategias estrictamente dominadas, por lo que no es posible resolver el juego por dominación, ni reducir la matriz. A continuación, paso a buscar combinaciones de mejores respuestas para hallar equilibrios de Nash en estrategias puras (ENEP). Pinto los mejores pagos de J1 en amarillo, y los de J2 en verde. No existen combinaciones de mejores respuestas, por lo que el juego no tiene ENEP.

2.2 Paso entonces a hallar el ENEM. Comienzo por J1:

$$UE_{J1}(A_1) = 3q + 2(1-q) \Rightarrow 2 + q$$

$$UE_{J1}(A_2) = 1q + 4(1-q) \Rightarrow 4 - 3q$$

Ahora igualo ambas utilidades esperadas, para hallar el valor de q que vuelve indiferente a J1:

$$2 + q = 4 - 3q \Rightarrow q = 1/2$$

Ahora hago lo mismo para J2:

$$UE_{J2}(B_1) = 1p + 2(1-p) \Rightarrow 2 - p$$

$$UE_{J2}(B_2) = 2p + 1(1-p) \Rightarrow p + 1$$

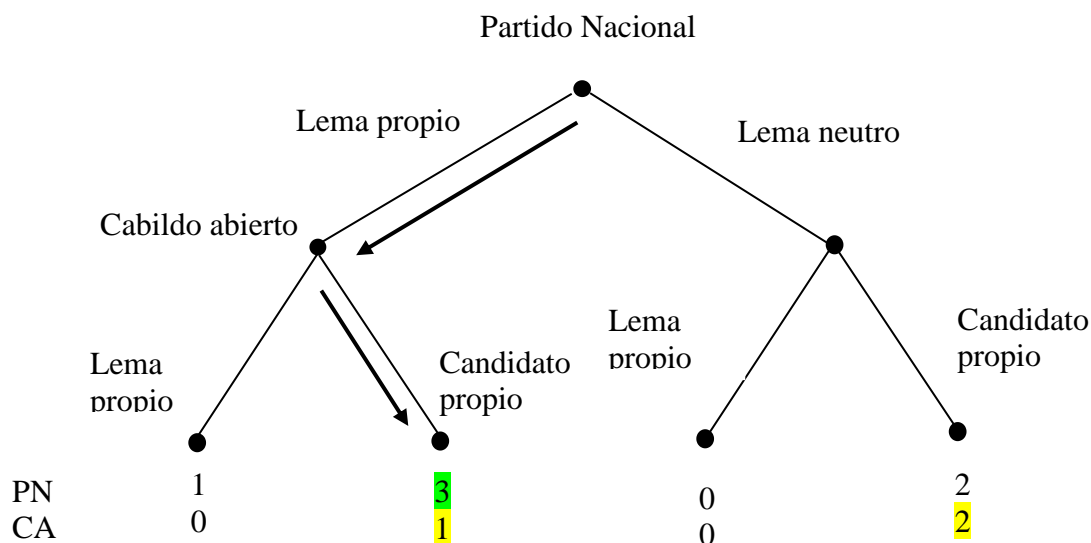
Igualando ambas utilidades esperadas:

$$2 - p = p + 1 \Rightarrow p = 1/2$$

Existe una combinación de mejores respuestas en estrategias mixtas cuando J1 juega A_1 con una probabilidad de $1/2$ y A_2 con una probabilidad de $1/2$, y J2 juega B_1 con una probabilidad de $1/2$ y B_2 con una probabilidad de $1/2$.

$$ENEM = \{(1/2 A_1 ; 1/2 A_2) , (1/2 B_1 ; 1/2 B_2)\}$$

Ejercicio 3



3.1. Identifique el resultado por retroinducción. Explique.

Para encontrar el resultado por retroinducción primero debemos calcular las mejores respuestas de CA ante las dos posibles jugadas de PN. Así vemos que si la PN juega Lema propio, a CA le conviene responder con Candidato propio porque 1 es más que 0 y si PN juega Lema neutro, a CA también le conviene responder con Candidato propio porque 2 es más que 0. Sabiendo esto, PN evalúa ambos posibles resultados y decide jugar Lema propio, de forma de obtener un pago de 3 en lugar de 2 que obtendría jugando Lema neutro. El resultado del juego por retroinducción entonces es (Lema propio, Candidato propio), al que se llega por el camino de equilibrio marcado por las flechas.

3.2. Identifique las estrategias de los jugadores y represente la forma normal del juego.

El Partido Nacional, al jugar en primer lugar, tiene dos estrategias que coinciden con sus acciones: presentar el Lema propio o presentar un Lema neutro. En cambio, Cabildo Abierto, que juega en segundo lugar, tiene cuatro estrategias. Una estrategia para el jugador que juega en segundo término es un plan de acción que indica qué hacer en cada nodo que le toca jugar. Por lo tanto, debe especificarse las acciones que tomará después de que el PN haya elegido cada una de sus estrategias. En otras palabras las estrategias posibles consisten en una combinación de sus dos acciones para cada una de las acciones posibles del PN. Para simplificar llamaremos C a presentar candidato propio dentro del lema y L a presentar un Lema propio. Entonces sus posibles estrategias son (C,C), esto es presentar candidato propio en cualquier caso; (C,L) o sea, presentar candidato propio si PN jugó Lema propio y presentar Lema propio si PN jugó Lema neutro; (L,C), es decir, presentar Lema propio si PN jugó Lema propio y presentar Candidato propio si PN jugó Lema neutro; y, finalmente, (L,L) lo que significa que presentará Lema propio cualquiera haya sido la jugada de PN. La siguiente matriz representa el juego en forma normal:

		CABILDO ABIERTO			
		C,C	C,L	L,C	L,L
PARTIDO NACIONAL	Lema Propio	3,1	3,1	1,0	1,0
	Lema Neutro	2,2	0,0	2,2	0,0

3.3. Identifique el o los equilibrios de Nash (en estrategias puras). Explique.

Para identificar los EN debemos ubicar pares de estrategias que contengan las mejores respuestas de cada jugador a cada estrategia del otro jugador. Para hacerlo resaltamos con amarillo las mayores utilidades que obtiene CA para cada una de las acciones de PN, Lema propio y Lema neutro. De la misma forma resaltamos en verde las mejores respuestas de PN a cada una de las estrategias de CA. Hay tres celdas que contienen pagos resaltados con ambos colores, lo que significa que están ubicados en las mejores respuestas de ambos jugadores. Esas celdas representan tres equilibrios de Nash. El primero es (LP,CC), o sea presentar Lema propio para el PN y presentar Candidato propio para CA, independientemente de lo que haga PN. El segundo es (LP,CL) es decir presentar Lema propio para el PN y presentar Candidato propio para CA en ese caso pero presentar Lema propio si PN juega Lema neutro. Y el tercero es (LN,LC), esto es, presentar Lema Neutro para PN y presentar Lema Propio para CA si PN juega Lema propio pero presentar Candidato propio si PN juega Lema neutro.

3.4. ¿Existe alguna “amenaza vacía” en el o los equilibrios de Nash que identificó? En qué consiste esa amenaza vacía? Fundamente su respuesta

El tercer equilibrio de Nash identificado (LN,LC) contiene claramente una amenaza vacía, porque implica que CA usaría su propio lema si el PN va con el suyo. Se trata precisamente de lo que declaró Manini a La Diaria “Si eso no fuera posible ..., CA va a ir como CA y punto”. Sin embargo, llegado el caso de que PN decidiera ir con su propio lema a CA le conviene presentar un candidato propio dentro del lema PN antes que presentar su propio lema, porque obtiene una utilidad de 1 en lugar de 0. Por lo tanto PN no tomará en cuenta esa amenaza ni presentará un Lema neutro, ya que obtiene mayor utilidad presentando su propio lema.

Ejercicio 4

4.1 Diga cuáles son los jugadores del juego y cuáles son sus estrategias.

El juego tiene dos jugadores: el Presidente y el Ministro.

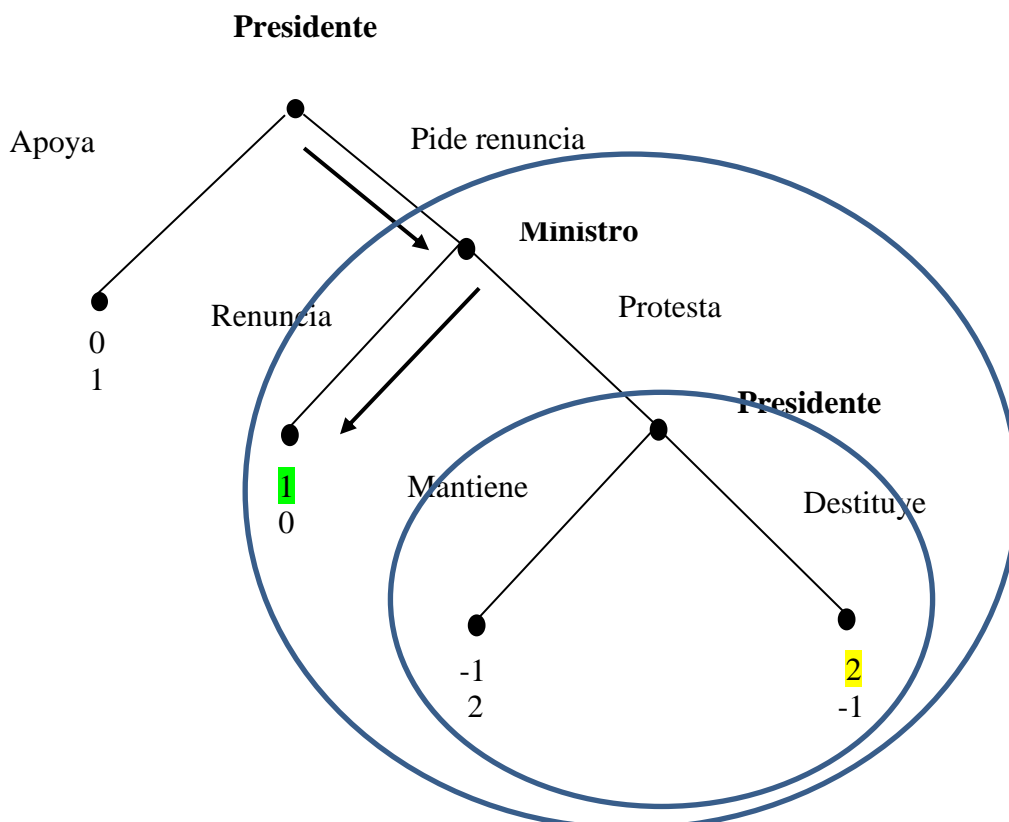
El Presidente juega dos veces en este juego por lo que sus estrategias deben incluir lo que hará cuando le toque jugar por segunda vez, en función de la jugada que realice el Mnistro en caso de que le toque jugar. Así el presidente tiene 3 estrategias:

- 1) Apoyar al Ministro (A). Esta estrategia es simplemente una acción ya que de tomarla no deberá hacer nada más porque se termina el juego
- 2) Pedirle la renuncia al Ministro y si el Ministro protesta, mantenerlo en su cargo (RM).
- 3) Pedirle la renuncia al Ministro y si el Ministro protesta, destituirlo (RD).

El Ministro tiene simplemente dos estrategias que coinciden con sus acciones ya que sólo juega en un nodo, en el caso que el Presidente le pida la renuncia: renunciar (R) o protestar (P).

4.2 Represente el juego usando la forma extensiva y determine el resultado por retroinducción.

El árbol siguiente representa la forma extensiva del juego:



Para encontrar el resultado por retroinducción primero debemos calcular las mejores respuestas del Presidente cuando juega en último lugar. Luego de que el Presidente pide la renuncia, si el Ministro protesta, el Presidente lo destituirá, porque obtiene 2 en lugar de -1. Entonces, subimos un nivel en el juego, cuando le toca jugar al Ministro que debe decidir si renunciar o protestar. Como sabe que protestando logrará que el Presidente lo destituya y obtendrá una utilidad de -1, va a elegir renunciar con lo que obtiene una utilidad de 0 que es mayor. Finalmente, en el primer nivel del juego, cuando le toca jugar al Presidente, va a pedir la renuncia del ministro porque sabe que obtendrá una utilidad de 1 cuando el ministro renuncie en lugar de 0 que obtendría apoyándolo. Entonces el resultado por retroinducción será al que se llega por el camino de equilibrio marcado por las flechas: la renuncia del ministro luego de que el presidente se la pida con utilidades de 1 y 0 respectivamente.

4.3 Identifique todos los subjuegos. Explique

Un subjuego dentro de un juego en forma extensiva es una parte del juego que:

- Empieza en un nodo de decisión que constituye un conjunto de información con un único nodo (singleton), esto es, un punto del juego en el que se conocen todas las jugadas anteriores de todos los jugadores.
- Incluye a todos los nodos que lo siguen.
- No interseca a ningún otro conjunto de información.

En este juego, por lo tanto, hay dos subjuegos propios (sin contar el juego completo) identificados con un óvalo azul; el primero comienzan cuando le toca jugar al ministro y el segundo cuando le toca jugar por segunda vez al presidente.

4.4 Identifique el par de estrategias que conduce al resultado por retroinducción y muestre que se trata de un equilibrio perfecto por subjuegos

El par de estrategias que conduce al resultado por retroinducción es (RD,R) lo que representa que el presidente opta por pedir la renuncia al ministro y, en caso de que proteste, destituirlo, al tiempo que el Ministro decide renunciar (ver 4.1)

El perfil de estrategias (RD;R) es perfecto por subjuegos porque es un equilibrio en el juego completo, como ya vimos y también es un equilibrio en cada uno de los dos subjuegos propios. En el subjuego final, sólo juega el Presidente y lo que le conviene hacer es destituir al ministro, lo que está implícito en la estrategia RD. En el otro subjuego, le toca jugar al Ministro y luego al Presidente, y allí el Ministro usa su estrategia renunciar (R) que es lo mejor que puede hacer en ese caso, por lo que también es un equilibrio en ese subjuego.