# Maestría en Economía Internacional

**Extracción de Señales - Tema II**

Profesora: Ana Laura Badagián

# Contenido

# Bibliografía para este tema:


James D. Hamilton, (1994): Time Series Analysis, Chapter 6: Spectral Analysis, pp: 152-179. Princeton University Press, New Jersey

Gourieroux, C. and Monfort, A. and Gallo, G.M. (1997): Time series and dynamic models. Chapters 2 and 3. Cambridge Univ Press.

Hodrick, Robert J. and E.C. Prescott (1980) "Postwar U.S. Business Cycles: an Empirical Investigation"; mss. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University; *Discussion Papers 451, Northwestern University.*

# I. Definiciones

El procedimiento de filtrado de una serie de tiempo consiste en realizar una combinación lineal de las observaciones originales de la variable para distintos momentos del tiempo. Se realiza con la finalidad de remover algún componente "no deseado" de la serie original y de obtener una estimación de la señal "deseada" por el investigador. Así, la operación de filtrar una serie es una manera de resolver el problema de extracción de señales. Por ejemplo, en estudios empíricos de series macroeconómicas, se suelen realizar ajustes estacionales y/o hacer una descomposición en tendencia y ciclo para medir las fluctuaciones correspondientes a las frecuencias correspondientes al ciclo macroeconómico.

Sea $\{x_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ un proceso estocástico estacionario con varianza finita que se tomará como proceso *input.* Se define una nueva serie $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$, que es construida como una media móvil ponderada de las observaciones rezagadas, presente y futuras del proceso *input, de forma* que:

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j x_{t-j} = h(L)x_t$$

donde la secuencia $\{h_j\}$ son valores reales y fijos, y se denominan ponderadores del filtro. Se requiere que $h(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j L^j$ *y que* $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_j| < \infty$, para asegurar que la varianza de $y_t$ sea finita. Dadas estas condiciones, se dice que $y_t$ es la versión filtrada de $x_t$, o el proceso *output* que resulta de la aplicación del filtro.

Esto tiene una interpretación clara desde el punto de vista económico, o más precisamente desde el punto de vista de la teoría del ciclo económico.

La mayoría de los modelos de las modernas teorías de los ciclos económicos se construyen sobre la base de *shocks* exógenos (*inputs)* para generar fluctuaciones cíclicas y el modelo económico actúa como los ponderadores del filtro que transforma dichos *shocks* y genera las series de tiempo *(outputs)* consumo, inversión, etc.

La clase de filtros planteada tiene tres propiedades básicas:

a) Preservación de la escala: $h(L).(kx_t) = k \cdot (h(L))x_t$

b) Principio de la superposición:

$$h(L).(x_t + y_t) = h(L)x_t + h(L)y_t$$

c) Invarianza temporal: Si $y_t = h(L)x_t$ , entonces

$$y_{t+\tau} = h(L)x_{t+\tau}$$

Las dos primeras propiedades pueden ser combinadas para expresar la de linealidad de *h(L):*

$$h(L)(m \cdot x_t + n \cdot y_t) = m \cdot h(L)x_t + n \cdot h(L)y_t \, .$$

La función $h(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^j$ es una función generatriz, en la que si se sustituye *z por* $e^{-i\omega}$, se obtiene la *función de respuesta de frecuencia del filtro,*

$$h\left(e^{-i\omega}\right)=\sum_{j=r}^{s} h_j e^{-i\omega j}$$

Dicha función resume la acción que tiene el filtro sobre la serie *input al que es aplicado. Se puede* demostrar que el espectro del proceso *output* $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ *es una función del espectro del* proceso *input* $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ *de la siguiente forma:*

$$S_y(\omega)=\left|h\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 . S_x(\omega). \qquad (2)$$

$$S_y(\omega)=h\left(e^{-i\omega}\right)h\left(e^{i\omega}\right)S_x(\omega)$$

$$S_y(\omega) = \left|h\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 . S_x(\omega) .$$

Esto significa que un filtro siempre distorsiona el proceso original al que se aplica, en el sentido que amplifica o atenúa determinados ciclos y adelanta o retrasa el proceso resultante.

El filtro *h(L)* tiene el efecto de multiplicar el espectro de $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ por el cuadrado del módulo de la función de respuesta de frecuencia que se denomina *función de transferencia* y se anotará *H(ω).*

A su vez, el módulo de la función de respuesta de frecuencia se llama *ganancia,* y es un número real no negativo:

$$G(\omega) = \left| h\left(e^{-i\omega}\right) \right|,$$

por lo que el cuadrado de la ganancia es la función de transferencia

$$H(\omega) \equiv \left[G(\omega)\right]^2 = \left| h\left(e^{-i\omega}\right) \right|^2.$$

La ecuación (2) implica que para una determinada frecuencia la amplitud de los ciclos de $\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ es la misma que la del proceso $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ multiplicada por la función de transferencia. Así, la acción sobre $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ de un filtro está completamente determinada por la función de respuesta de frecuencia o la función de transferencia del filtro.

Éstas capturan toda la información del efecto del filtro y es a través de las mismas que los filtros son analizados en el dominio de las frecuencias. Un gráfico de la función de transferencia contra las frecuencias muestra qué frecuencias son atenuadas y cuáles son realzadas cuando se aplica un filtro.

# I. Filtros empiricistas

Los métodos empiricistas provienen del análisis de un gran número de series reales, pero no hacen referencia explícita a ningún modelo teórico de generación de los datos.

El inconveniente de estos procedimientos es que al haberse desarrollado sin prácticamente ninguna consideración de tipo teórica, pueden conducir a la extracción de señales contaminadas y/o erróneas, y por lo tanto, no reflejan el real comportamiento de la señal de interés. Sin embargo, la mayoría de los desarrollos sobre extracción de señales, han recurrido a los filtros empiricistas a la hora de estimar el componente cíclico.

Los ejemplos de filtros empiricistas más utilizados para estudiar los componentes de las series en economía son el método X11, X11 ARIMA y la última versión X12 ARIMA (en los tres se trata de métodos de desestacionalización), la primera diferencia temporal, los procedimientos de alisado exponencial y el filtro de Hodrick - Prescott (1980).

# II.1 La serie desestacionalizada

Una señal que suelen publicar las agencias estadísticas es la denominada serie ajustada de estacionalidad. La idea es que cada observación $Y_t$ *de la serie objeto de estudio puede* descomponerse en

$$Y_t = Y_t^{sa} + S_t ,$$

Siendo $Y_t^{sa}$ la serie ajustada de estacionalidad, y $S_t$ el componente estacional. Es inmediato que en el modelo aditivo,

$$Y_t^{sa} = T_t + C_t + I_t ,$$

por lo que el interés será estimar el coeficiente estacional para sustraerlo de las observaciones y así obtener la serie ajustada de estacionalidad. ¿Qué es estacionalidad?

- Nerlove (1964):

  *Se hace referencia a los movimientos “casi regulares” que se observan en las series de cada año. Las oscilaciones pueden ser semestrales, trimestrales, mensuales, semanales o diarias.*

- Este tipo de oscilaciones se da, en mayor o menor grado, en gran parte de las series económicas. Las mismas se deben a:

  - Clima.
  - Días festivos.
  - Costumbres.
  - Aspectos institucionales.

- Las oscilaciones estacionales no son perfectamente regulares debido a que:

  - Las condiciones climáticas no se repiten exactamente año a año.
  - Los días festivos pueden variar de fecha en el año ("feriados móviles" como Carnaval o Semana de Turismo) o del día de la semana en que ocurren (no es el mismo efecto si el feriado ocurre un lunes o un miércoles).
  - Las costumbres cambian.

- Thomas y Wallis (1971):

  *Aquellos movimientos intra-anuales y sistemáticos, aunque no necesariamente regulares, en las series económicas que, con frecuencia, vienen causados por fenómenos no económicos, tales como cambios climáticos y la regularidad de las fiestas religiosas* (feriados).

# ¿Cómo tratar la estacionalidad?

- El método será diferente según el objetivo del estudio en cuestión.
- En tareas de construcción de modelos econométricos, la variación estacional de las series debe tenerse en cuenta y explicarse por el modelo en su conjunto, pero no tiene por qué ser un objetivo el estimar el componente estacional de manera separada.

- Cuando se quiere estimar el componente tendencial de una serie económica es necesario utilizar procedimientos de extracción del componente estacional: Procedimientos de desestacionalización.

**OBSERVACION: Al especificar modelos econométricos no deben utilizarse variables previamente desestacionalizadas, ya que ello puede distorsionar la relación entre las variables incluidas en el modelo.**

Históricamente, la estacionalidad se aproximaba a través de esquemas deterministas que consistían en funciones sinusoidales de período anual o variables artificiales. Sin embargo, la rigidez que implicaba este tipo de modelización hizo que este enfoque se abandonara. El siguiente avance consistió en estimar las señales mediante medias móviles aplicadas sobre la serie original. Un media móvil centrada de orden 2*m +1* se define como

$$MM(2m+1)_t = \sum_{j=-m}^{m} a_j Y_{t-j} \,,$$

donde $a_j \neq 0$ *para* $j = -m, m,$ $\sum_{j=-m}^{m} a_j = 1$ *, y normalmente* $a_j = a_{-j}$ *, lo que define una media* móvil simétrica.

Así, las medias móviles son filtros o combinaciones lineales de las observaciones del proceso estocástico de interés, con lo que el carácter aleatorio de este se traslada a la señal resultante. Para estimar la estacionalidad a través de medias móviles, se promedian observaciones correspondientes al mismo mes (trimestre, cuatrimestre, etc.) de distintos años:

$$\frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m} Y_{t-12j}^{l} = \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m} S_{t-12j}^{l} + \frac{1}{2m+1}\sum_{j=-m}^{m} I_{t-12j}^{l}$$

donde el momento *t corresponde al mes (trimestre, cuatrimestre, etc.) l del año.*

Otra forma de aproximar la serie ajustada de estacionalidad es a través de sucesivas aplicaciones de filtros o medias móviles. Los métodos X11, X11-ARIMA y X12-ARIMA se basan en esta idea y son los procedimientos empiricistas de desestacionalización más conocidos y utilizados por las agencias estadísticas.

El método X11 nace a partir de los trabajos de J. Shiskin en el Bureau of the Census de Estados Unidos en 1954, como método automático de desestacionalización basado en el uso intensivo de sistemas computacionales y con la capacidad de producir resultados para un número grande de series sin requerir conocimientos de analistas expertos.

Otra forma de aproximar la serie ajustada de estacionalidad es a través de sucesivas aplicaciones de filtros o medias móviles. Los métodos X11, X11-ARIMA y X12-ARIMA se basan en esta idea y son los procedimientos empiricistas de desestacionalización más conocidos y utilizados por las agencias estadísticas.

El método X11 nace a partir de los trabajos de J. Shiskin en el Bureau of the Census de Estados Unidos en 1954, como método automático de desestacionalización basado en el uso intensivo de sistemas computacionales y con la capacidad de producir resultados para un número grande de series sin requerir conocimientos de analistas expertos.

El método X11-ARIMA constituye una modificación y perfeccionamiento de método anterior y fue desarrollado por E. Bee Dagum a partir de 1980. Su principal aporte consiste en la incorporación de un procedimiento automático para ajustar un modelo ARIMA a la serie a descomponer, para, de esta forma, predecir los valores correspondientes a un año en cada extremo de la muestra y extraer los componentes utilizando estas predicciones como si fuesen valores reales.

Más recientemente, se ha desarrollado una nueva versión denominada X12 ARIMA que incorpora un nuevo conjunto de pruebas de diagnóstico y herramientas para el tratamiento de observaciones atípicas y la estimación de efectos especiales.

Estos dos últimos métodos se basan en un proceso iterativo de aplicación de distintos tipos de medias móviles.

Básicamente, consisten en primer lugar, en la estimación de un modelo ARIMA multiplicativo estacional de los datos originales. Si la estimación cumple una serie de requisitos se realiza la extrapolación un año hacia adelante y eventualmente hacia atrás.

En segundo lugar, se aplican a la serie extendida los filtros correspondientes. El hecho de extender la serie posibilita la aplicación a las observaciones iniciales y finales (originales) de filtros similares a los aplicados a las observaciones centrales.

Para la descripción de los pasos se supondrá que la serie $Y_t$ es de frecuencia trimestral *y* puede ser representada por el modelo aditivo

$$Y_t = TC_t + S_t + I_t$$

donde $TC_t$ es el componente tendencia ciclo, $S_t$ es el componente estacional e $I_t$ *el* irregular. El procedimiento consta de las siguientes etapas:

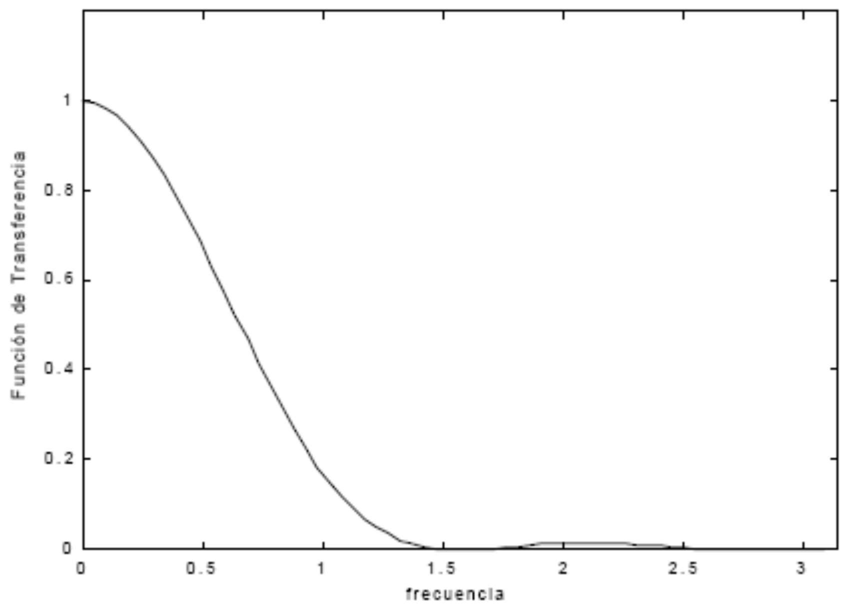
1. Se calcula una primera aproximación de la tendencia mediante la aplicación de una media móvil de tipo aritmética en los datos originales con el fin de anular los movimientos estacionales de orden 4.

El filtro aplicado es

$$0.125L^2 + 0.25L + 0.25 + 0.25L^{-1} + 0.125L^{-2}$$

y en la figura 4 se presenta su función de transferencia. En la misma se observa que la media móvil aplicada suaviza las fluctuaciones asociadas a todas las frecuencias, a excepción de las de frecuencia cero que son mantenidas y las vinculadas a las frecuencias mayores a $\pi/2$ que básicamente son suprimidas.

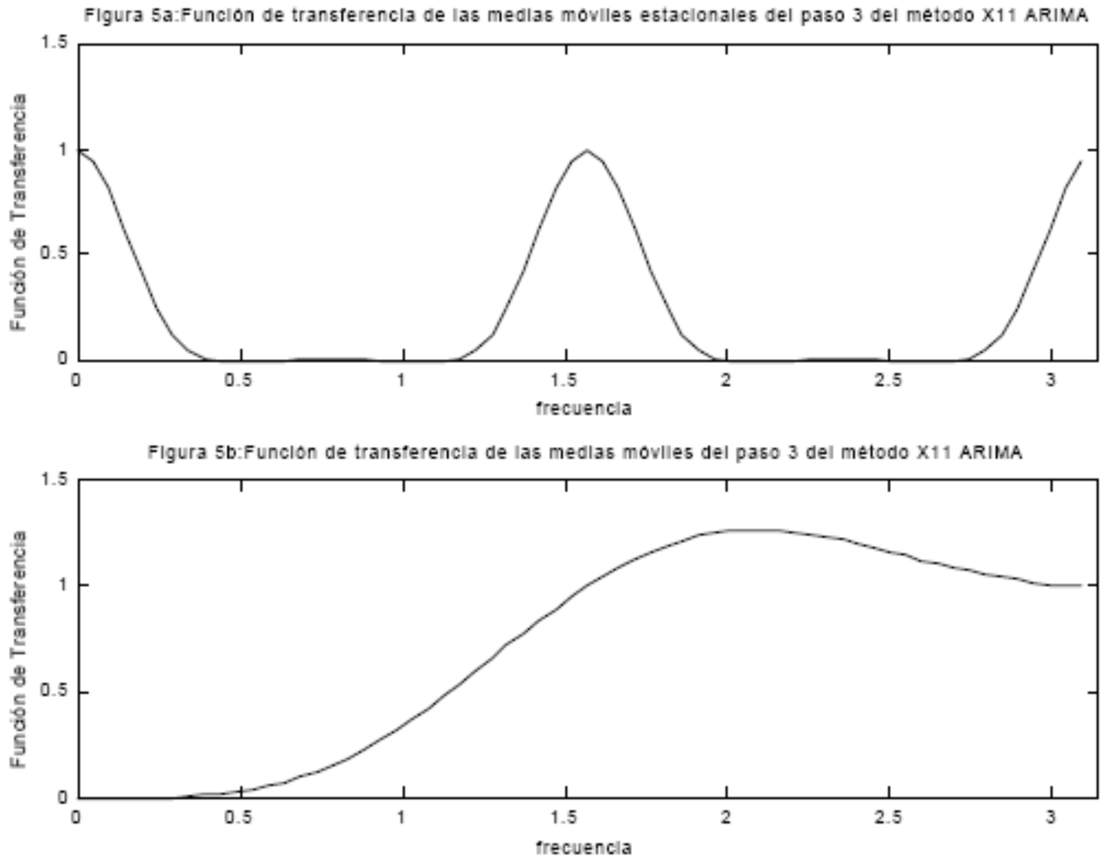
Figura 4:Función de transferencia de las medias móviles del paso 1 del método X11 ARIMA



2. Se realiza una primera estimación de la serie sin tendencia, sustrayendo de los datos originales la serie obtenida en 1. De esta forma, se obtiene una primera estimación del componente estacionalidad-irregular ($SI_t$).

3. Se realiza una primera estimación del componente estacional $S_t$ que surge de la aplicación secuencial de dos filtros sobre ($SI_t$) . Uno es una media móvil estacional de *5* términos $1/9\ L^{-8} + 2/9\ L^{-4} + 3/9 + 2/9L^{4} + 1/9L^{8}$ y el otro, también de 5 términos es $-1/8L^{-2} – 2/8\ L^{-1} + 6/8 – 2/8\ L - 1/8\ L^{2}$ , cuyas funciones de transferencia se presentan *en* las figuras 5a y 5b, respectivamente.

La primer media móvil mantiene las oscilaciones vinculadas a las frecuencias estacionales de orden 2 y 4, así como a la frecuencia cero y comprime las restantes. Por su parte, el segundo filtro suprime las frecuencias bajas y realza aquellas pertenecientes a la banda [*π/2,π].*



4. Las estimaciones preliminares de $S_t$ se restan de los componentes $SI_t$ hallados previamente, lo que permite una primera estimación del componente irregular $I_t$ .

5. Dentro del componente $I_t$ se buscan los datos atípicos *(outliers),* seleccionando como tales aquellos que se apartan en 2,5 veces del desvío estándar de los irregulares (aunque este valor puede ser modificado por el analista), eliminando este componente de las observaciones originales. Para los irregulares comprendidos entre 1,5 y 2,5 veces el desvío estándar, el método tiene un sistema de corrección proporcional del irregular.

6. Una vez corregidos los irregulares se realiza la diferencia entre la serie original y el componente estacional, obteniendo una primera estimación de los valores desestacionalizados.

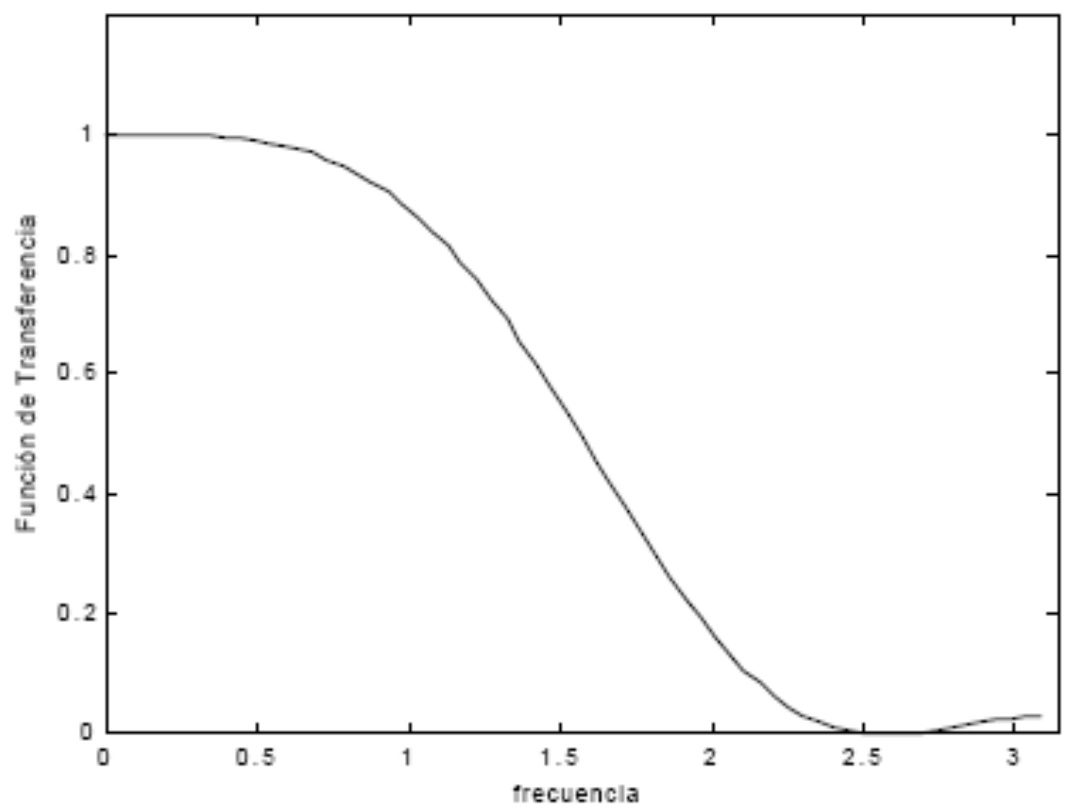
7. A los valores desestacionalizados se le aplica una media móvil de Henderson de 5 términos, que se representa por el siguiente filtro:

$$H = -0.073L^2 + 0.294L + 0.558 + 0.294L^{-1} - 0.073L^{-2}$$

Para un gran número de series, la media móvil de Henderson permite obtener estimaciones de la tendencia libre de elementos irregulares.

La función de ganancia de esta media móvil se presenta en la figura 6. En la misma se observa que este filtro no depura la estacionalidad, y es por esta razón que debe ser aplicado sobre las series desestacionalizadas. Tampoco corrige los valores atípicos y por ello se aplica una vez que estos fueron removidos.

Figura 6:Función de transferencia de las medias móviles de Henderson de 5 términos



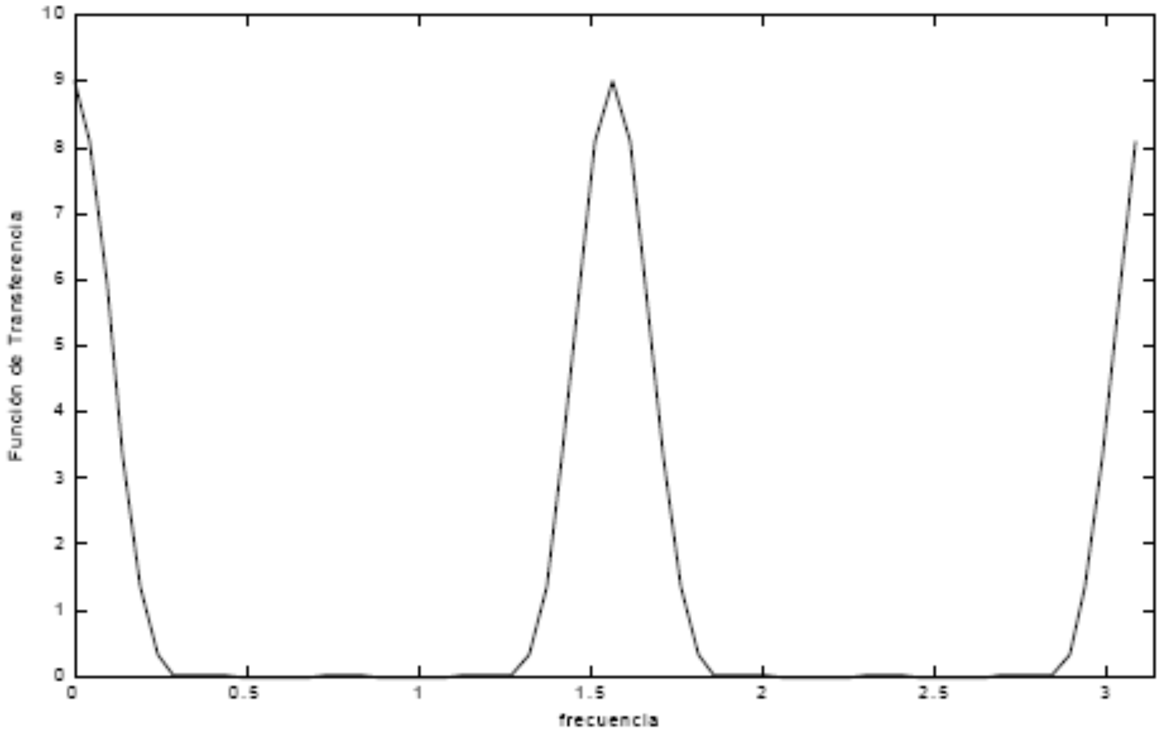
8. La estimación de la tendencia-ciclo obtenida en el paso anterior es sustraída de la serie original para obtener una nueva estimación del componente *t SI .*

9. A este nuevo componente se le aplican secuencialmente un promedio móvil estacional de siete términos y uno de los filtros de la etapa (3) para una nueva estimación del componente estacional. La transformación aplicada en esta fase es

$$\left(-1/8L^{-2}-2/8L^{-1}+6/8-2/8L-1/8L^{2}\right)\times$$
$$\left(1/15L^{-12}+2/15L^{-8}+3/15L^{-4}+3/15+3/15L^{4}+2/15L^{8}+1/15L^{12}\right)$$

La función de transferencia de la media móvil estacional se presenta en la figura 7. Este filtro tiene el efecto de realzar las fluctuaciones asociadas a las bajas frecuencias y estacionales trimestrales, mientras que la otra media móvil aplicada, como ya fue planteado, suprime las primeras y realza en cierta medida las frecuencias en el intervalo [$\pi/2,\pi$].

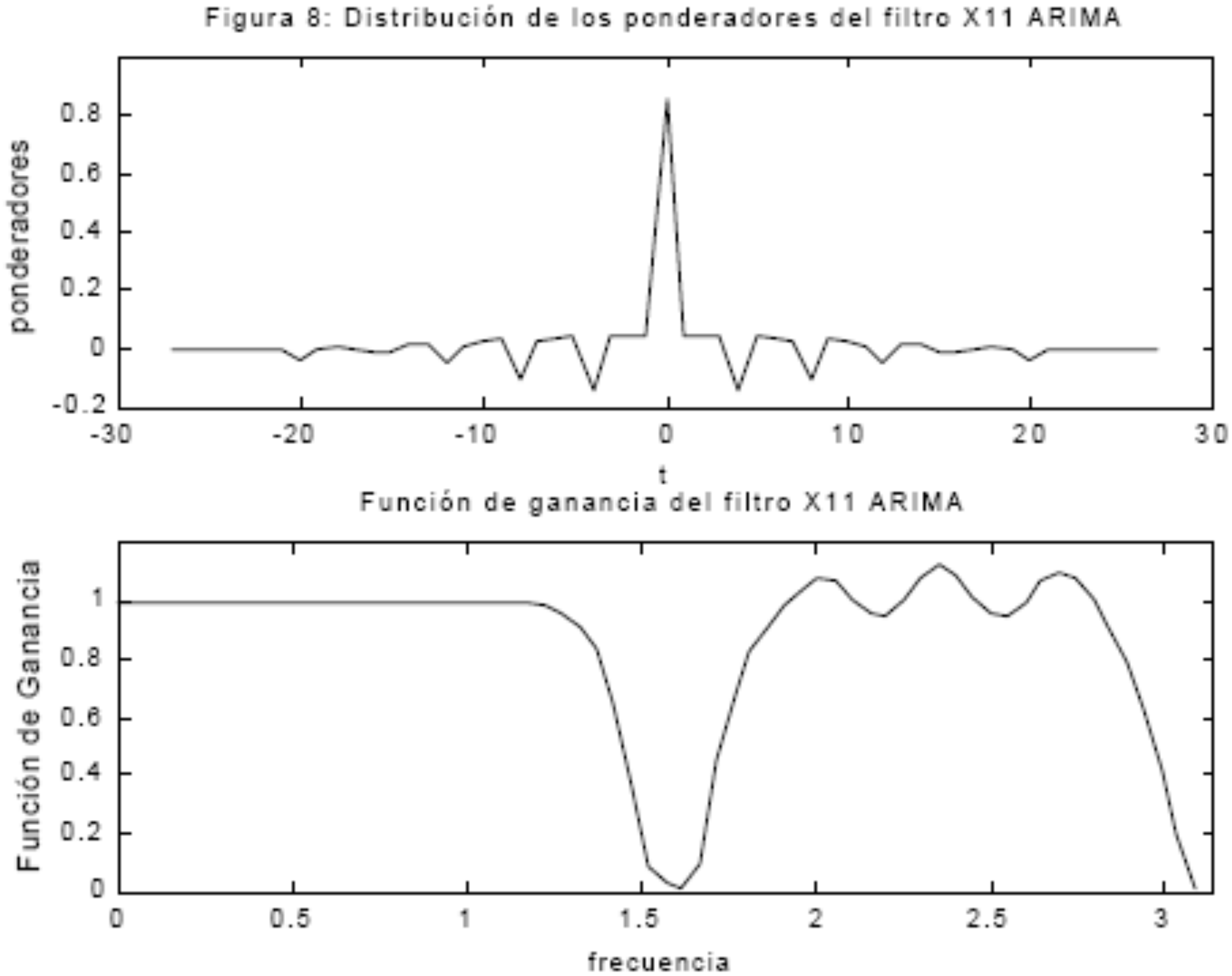
Figura 7:Función de transferencia de las medias móviles estacionales del paso 8 del método X11 ARIMA



10. Finalmente, para obtener la serie desestacionalizada se sustraen de la serie original los factores estacionales resultantes.

La secuencia anterior es repetida 2 veces más, cada una de ellas partiendo de diferentes series, a las que se corrige por los valores extremos detectados.

El procedimiento puede ser resumido como un filtro lineal o de medias móviles simétricas (excluyendo el paso de detección de atípicos) de 57 trimestres de duración (28 antes y 28 después de la observación central). La distribución de los ponderadores y la función de ganancia del filtro global se presenta en la figura 8.




La función de transferencia muestra claramente que el filtro conserva las frecuencias bajas asociadas al componente tendencial y anula las periodicidades estacionales representadas por las frecuencias *$\pi/2$ y $\pi$.*

# II. II Primera diferencia temporal

La diferenciación, en particular, la primera diferencia temporal de las series se utiliza para eliminar componentes no estacionarios de baja frecuencia. Se basa en la idea de que el componente secular es un paseo aleatorio, el componente cíclico es estacionario y ambos se encuentran incorrelacionados.

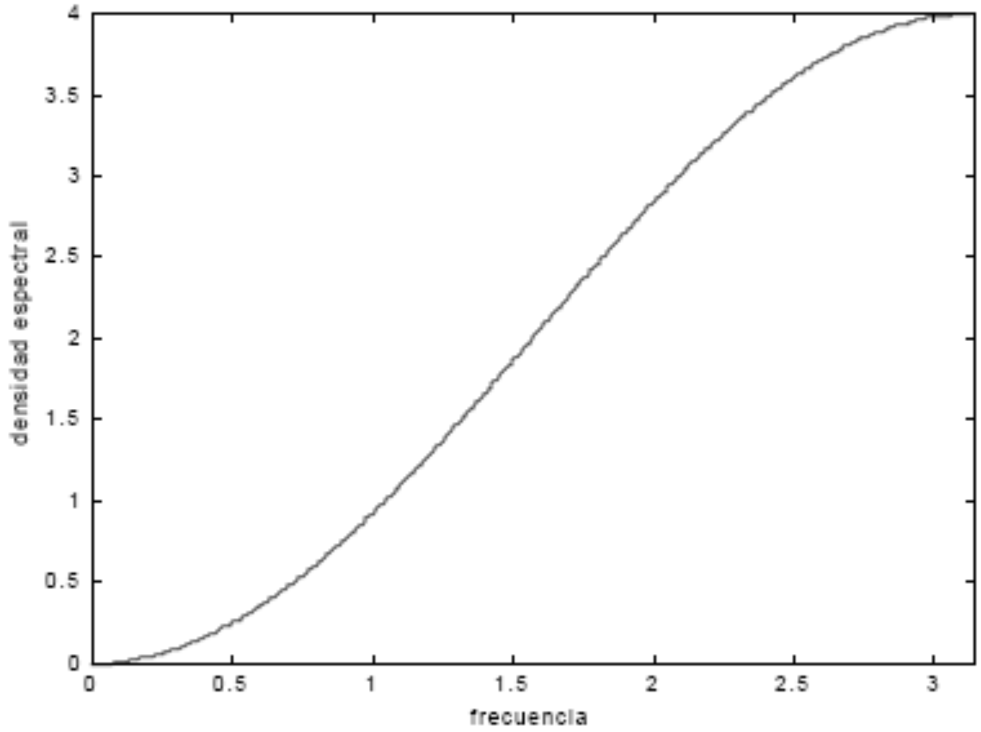
La aplicación de la primera diferencia tiene un conjunto de problemas, que dificultan la interpretación del componente resultante. En primer lugar, no es un filtro simétrico y, por lo tanto, introduce cambios de fase en la serie filtrada. Por otro lado, altera la importancia relativa de las oscilaciones correspondientes a las distintas frecuencias, lo que puede provocar distorsiones en el análisis del ciclo.

La función de transferencia que se presenta en la figura 9 es:

$$H(\omega) = \left(1 - e^{-i\omega}\right)\left(1 - e^{i\omega}\right) = 1 - e^{-i\omega} - e^{i\omega} + 1 = 2 - 2\cos(\omega)$$

Si bien la diferenciación de una serie atenúa las oscilaciones correspondientes a las frecuencias bajas, o sea las correspondientes al largo plazo, amplifica las correspondientes a las frecuencias altas. Cabe agregar que estos problemas se agravan si se necesita realizar un número mayor de diferencias.

Figura 9: Función de Transferencia del filtro Primera Diferencia Temporal



# II. III Alisado exponencial

El filtro de alisado exponencial surge de la resolución de un problema de optimización, en el que se minimiza la siguiente función de pérdida:

$$\min_{\{\tau_t\}_{t=1}^{T}} \left[ (y_t - \tau_t)^2 + \lambda(\tau_t - \tau_{t-1})^2 \right].$$

La idea es que el nivel (tendencia) de la serie de tiempo es localmente constante (constante o lineal por un período corto), con lo cual la serie evoluciona suavemente a lo largo del tiempo.

El primer término de la función de pérdida representa una medida de bondad de ajuste de la serie $y_t$ respecto a su tendencia $\tau_t$ , mientras que el segundo regula la suavidad de la tendencia, siendo λ la constante de alisado.

Las condiciones de primer orden del problema conducen a una estimación del componente cíclico igual a

$$c_t = \frac{\lambda(1-L)(1-L^{-1})}{\lambda(1-L)(1-L^{-1})+1} y_t .$$

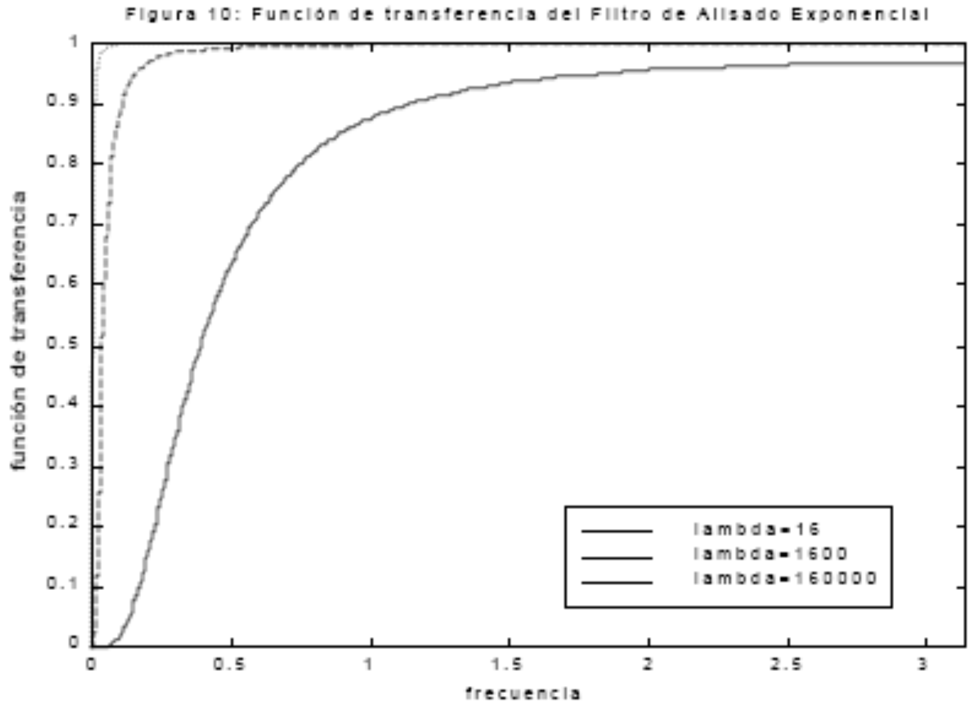
Los efectos del procedimiento de alisado exponencial pueden ser analizados más fácilmente bajo el dominio de frecuencias. La función de respuesta de frecuencias se puede obtener sustituyendo en la formulación del filtro, el operador de rezagos por $e^{-i\omega}$ (transformación de Fourier del filtro cíclico).

$$C(\omega) = \frac{\lambda\left(1-e^{-i\omega}\right)\left(1-e^{i\omega}\right)}{\lambda\left(1-e^{-i\omega}\right)\left(1-e^{i\omega}\right)+1} = \frac{2\lambda(1-\cos(\omega))}{2\lambda(1-\cos(\omega))+1}.$$

Por tanto, resulta que la función de transferencia del filtro es

$$H(\omega) = \left| \frac{2\lambda(1-\cos(\omega))}{2\lambda(1-\cos(\omega))+1} \right|^2 .$$

En la figura 10 se presenta la función de ganancia del filtro para $\lambda$ = *16, 1600 y 160000.*



La función de transferencia muestra que el filtro cíclico remueve los componentes asociados a las bajas frecuencias.

Sin embargo, mantiene las fluctuaciones de alta frecuencia, por lo cual debe aplicarse sobre la serie ajustada de estacionalidad o aún mejor, sobre la señal de tendencia-ciclo.

Por otro lado, a medida que se incrementa la constante de alisado, más suave es el componente de tendencia que extrae, y por contrapartida el filtro cíclico capta una mayor cuantía de las fluctuaciones asociadas a las frecuencias bajas.

# II. IV Hodrick-Prescott

El filtro de Hodrick-Prescott (1980) es el procedimiento más empleado en los últimos tiempos para extraer la tendencia de las series de tiempo macroeconómicas (Kydland y Prescott (1990), Kamil y Lorenzo (1998)).

Parte de la idea de que la serie observada $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ está conformada por un componente de tendencia y un componente cíclico, con lo que el problema será filtrar la tendencia de los datos, de modo de interpretar las desviaciones respecto a dicha tendencia como el componente cíclico.

Se basa en la idea de que la tendencia de la serie es estocástica y tiene un perfil suave a lo largo de tiempo, y asume que el componente cíclico se encuentra incorrelacionado con la tendencia. El filtro Hodrick-Prescott calcula una tendencia como la que resultaría del "trazo libre" de un investigador que busca delinear la trayectoria suave de la serie analizada. Dicha señal se estima a través del siguiente problema de minimización:

$$\arg\min_{\{\tau_t\}_{t=1}^{T}} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \tau_t)^2$$

Sujeto a:

$$\sum_{t=2}^{T-1} \left[(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})\right]^2 \leq \mu .$$

Dado un cierto valor de $\mu$, la resolución de este problema equivale a la minimización de la siguiente función sin restricciones:

$$\arg \min_{\{\tau_t\}_{t=1}^{T}} \left[ \sum_{t=1}^{T} (y_t - \tau_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 \right].$$

El primer término es la suma de cuadrados de los residuos de la serie respecto a la tendencia y representa una medida de bondad de ajuste. El segundo término representa la suma de cuadrados de la segunda diferencia del componente de tendencia multiplicado por $\lambda$ y es un indicador del grado de suavidad.

El parámetro $\lambda$ es el que regula la suavidad del componente de tendencia.

Cuanto mayor es el valor de $\lambda$, mayor es la penalización impuesta a las variaciones en la tasa de crecimiento del componente tendencial, obteniéndose una señal más suave.

Sin embargo, si la tendencia es más suave, peor resulta el ajuste de $\tau_t$ a $y_t$, con lo que el problema de minimización planteado establece un *trade-off* entre la bondad de ajuste y el grado de suavizado.

a) Si $\lambda = 0$ , el primer término debe ser cero para minimizar la función objetivo y para ello $\tau_t$ *e* $y_t$ deben ser idénticas. La bondad de ajuste es perfecta y el componente cíclico es cero.

b) Si $\lambda = \infty$, el segundo término debe ser cero para minimizar la función objetivo. Entonces $\tau_t$ *será una tendencia lineal. De esta forma, la función de transferencia del* filtro Hodrick - Prescott es igual a 1 cuando $\lambda = \infty$ para todas las frecuencias distintas de cero, y es cero para la frecuencia cero. Esto lleva a concluir que cuando $\lambda = \infty$ el filtro tiene la propiedad de reducir la tendencia o remover una raíz unitaria de un proceso I(1).

La condición de primer orden se obtiene diferenciando la función objetivo respecto a $\tau_t$:

$$2(y_t-\tau_t)-2\lambda[(\tau_t-\tau_{t-1})-(\tau_{t-1}-\tau_{t-2})]+4\lambda[(\tau_{t+1}-\tau_t)-(\tau_t-\tau_{t-1})]$$
$$-2\lambda[(\tau_{t+2}-\tau_{t+1})-(\tau_{t+1}-\tau_t)]=0$$

Empleando el operador de rezagos y dividiendo por 2 se obtiene:

$$y_t-\tau_t=\lambda[(1-L)\tau_t-(1-L)\tau_{t-1}]-2\lambda[(1-L)\tau_{t+1}-(1-L)\tau_t]+\lambda[(1-L)\tau_{t+2}-(1-L)\tau_{t+1}].$$

Aplicando repetidamente el operador de rezagos:

$$\begin{aligned}
y_t-\tau_t &= \lambda\left[(1-L)^2\tau_t\right]-2\lambda\left[(1-L)^2\tau_{t+1}\right]+\lambda\left[(1-L)^2\tau_{t+2}\right]\\
&= \lambda(1-L)^2\left[1-2L^{-1}+L^{-2}\right]\tau_t \Rightarrow\\
y_t &= \lambda(1-L)^2\left[1-2L^{-1}+L^{-2}\right]\tau_t+\tau_t \Rightarrow\\
y_t &= \left[\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2+1\right]\tau_t.
\end{aligned}$$

Si se define $F(L) = \lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2 + 1$, tal que $y_t = F(L)\cdot\tau_t$ y el filtro de crecimiento *como* $G(L) = [F(L)]^{-1}$, $\tau_t$ puede representarse como

$$\tau_t = G(L)y_t$$

El componente cíclico $c_t$ , se obtiene de la diferencia $y_t$ - $\tau_t$, de forma que

$$c_t = [1 - G(L)]y_t,$$

El filtro correspondiente está dado por:

$$C(L) = \frac{F(L)-1}{F(L)} = \frac{\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2}{\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2+1} = \frac{\lambda L^{-2}(1-L)^4}{\lambda L^{-2}(1-L)^4+1}$$

- por lo que

$$c_t = \frac{\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2}{\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2+1}\, y_t\,.$$

Ambos filtros son lineales y simétricos, con lo que no generan un cambio de fase, y por otro lado, los ponderadores del filtro cíclico suman cero, de forma que la ganancia es nula para la frecuencia cero, lo que tiene la propiedad de remover el componente de tendencia.

A continuación se realiza el análisis espectral del filtro Hodrick-Prescott. Se obtiene la función de respuesta de frecuencias sustituyendo en la formulación del filtro, el operador de rezagos por $e^{-i\omega}$.

$$C(\omega) = \frac{F(e^{-i\omega}) - 1}{F(e^{-i\omega})} = \frac{\lambda(1-e^{-i\omega})^2(1-e^{i\omega})^2}{\lambda(1-e^{-i\omega})^2(1-e^{i\omega})^2 + 1} = \frac{2^2\lambda(1-\cos(\omega))^2}{2^2\lambda(1-\cos(\omega))^2 + 1} = \frac{4\lambda(1-\cos(\omega))^2}{4\lambda(1-\cos(\omega))^2 + 1}$$

y la función de transferencia del filtro es

$$H(\omega) = \left| \frac{4\lambda(1-\cos(\omega))^2}{4\lambda(1-\cos(\omega))^2 + 1} \right|^2 .$$

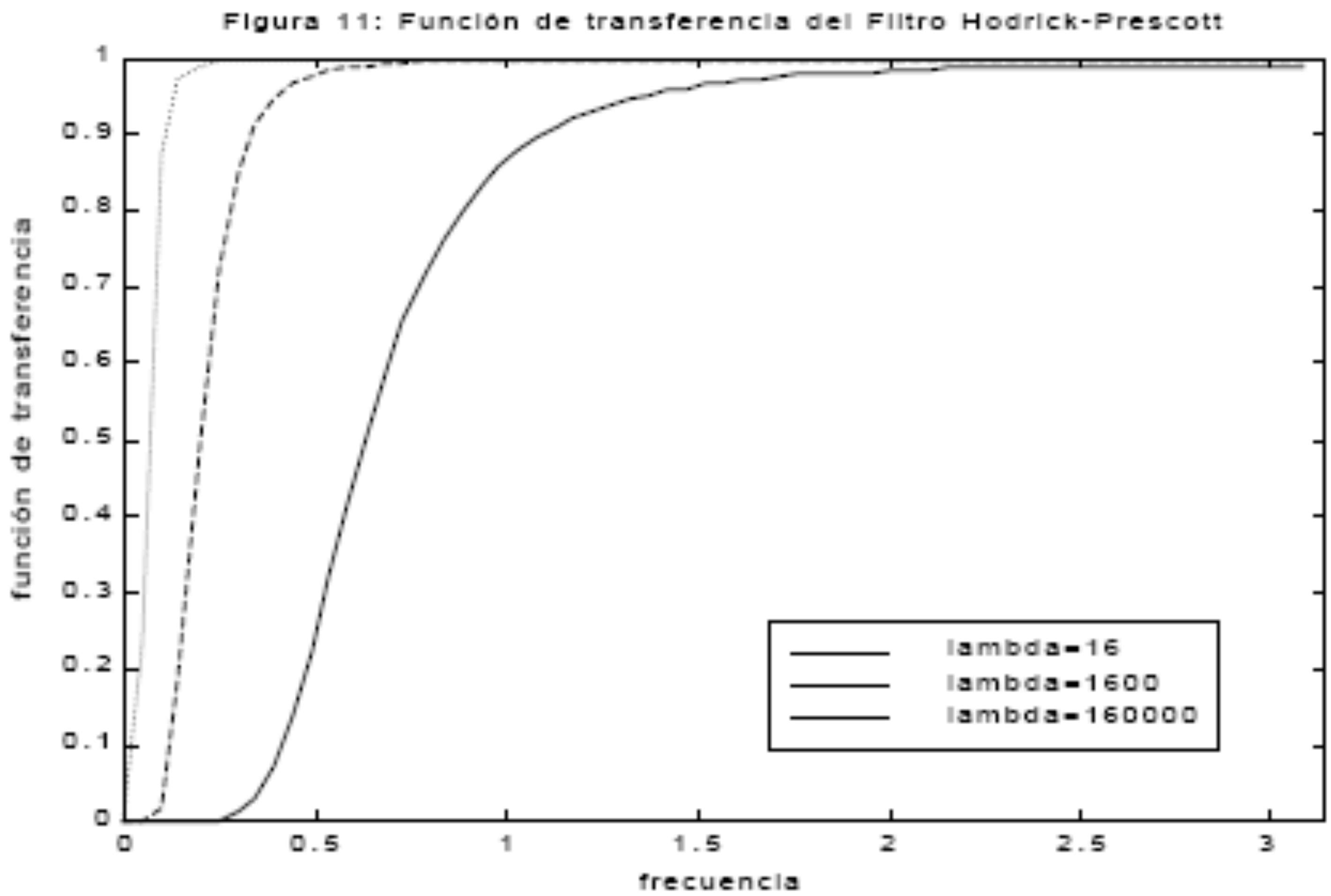


Figura 11: Función de transferencia del Filtro Hodrick-Prescott
función de transferencia
frecuencia
lambda=16
lambda=1600
lambda=160000
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0.5
1.5
2
2.5
3

Del mismo modo que el método de alisado exponencial el filtro cíclico Hodrick-Prescott remueve las frecuencias más bajas asociadas a las fluctuaciones de largo plazo y el componente de tendencia extraído es más suave en la medida que la constante de alisado es mayor.

King y Rebelo (1993) demuestran que cuando $\lambda$ = 1600 , el filtro Hodrick-Prescott es una aproximación a un filtro de paso alto ideal, que elimina las frecuencias correspondientes a 32 o más trimestres y tiene las siguientes propiedades:

i) La función de transferencia del filtro cíclico es cero para la frecuencia cero, pues cos(0)=1. Ello implica el filtro remueve los ciclos correspondientes a la frecuencia cero, es decir genera series estacionarias cuando se aplica a procesos I(1). Puede demostrarse según estos autores que vuelve estacionaria cualquier serie integrada de un orden menor o igual que cuatro.

ii) El filtro cíclico tiene una función de transferencia cercana a la unidad para las frecuencias altas (o cercanas a $\pi$), pues $\cos(\pi) = -1$, lo que implica que $C(\pi) = 16\lambda/(1+16\lambda)$ que es casi uno para valores grandes de $\lambda$.

iii) El filtro es simétrico, con lo que no induce cambio de fase.

iv) La función de transferencia del filtro no tiene ciclos.

Una de las ventajas más importantes del filtro Hodrick-Prescott es que es fácil de implementar. Pedersen (1999) deriva y reescribe la condición de primer orden del problema de minimización de la siguiente forma:

$$2(y_t - \tau_t) - 2\lambda[(\tau_t - \tau_{t-1}) - (\tau_{t-1} - \tau_{t-2})] + 4\lambda[(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]$$
$$- 2\lambda[(\tau_{t+2} - \tau_{t+1}) - (\tau_{t+1} - \tau_t)] = 0$$

Dado que el componente cíclico se mide como la diferencia entre la serie observada y el componente de tendencia de Hodrick - Prescott, se puede escribir:

$$c_t = y_t - \tau_t = \lambda(\tau_{t-2} - 4\tau_{t-1} + 6\tau_t - 4\tau_{t+1} + \tau_{t-2}), \quad t = 3,4,\ldots,T-2.$$

Partiendo de la primera condición de primer orden hasta la última, esto puede reescribirse como:

$$c_t = \lambda(\tau_t - 2\tau_{t+1} + \tau_{t+2}), \quad t = 1$$

$$c_t = \lambda(-2\tau_{t-1} + 5\tau_t - 4\tau_{t+1} + \tau_{t+2}), \quad t = 2$$

$$c_t = \lambda(\tau_{t-2} - 4\tau_{t-1} + 6\tau_t - 4\tau_{t+1} + \tau_{t+2}), \quad t = 3,4,\ldots,T-2$$

$$c_t = \lambda(-\tau_{t-3} - 4\tau_{t-2} + 5\tau_{t-1} - 2\tau_t), \quad t = T-1$$

$$c_t = \lambda(\tau_{t-2} - 2\tau_{t-1} + \tau_t), \quad t = T.$$

Escrito en forma matricial, esto mismo equivale a:

$$c_t = C(L)\tau_t = \lambda C \cdot \tau_t \,,$$

donde:

$$C \equiv \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez construida esta matriz de dimensión $T\,xT$ *,* puede calcularse la tendencia de Hodrick - Prescott a partir de

$$\tau_t = \left(\lambda C + I\right)^{-1} y_t \,,$$

donde $I$ es la matriz identidad, y luego se obtiene el componente cíclico simplemente haciendo

$$c_t = y_t - \tau_t \,.$$

# II.V Críticas a los filtros empiricistas

Los filtros empiricistas son criticados por haberse desarrollado sin prácticamente ninguna consideración de tipo teórica, lo que puede conducir a la extracción de unas señales -en este caso el componente cíclico-contaminadas por aquellas que no son de interés para el analista o equivocadas, y por lo tanto, pueden llevar a problemas desde el punto de vista interpretativo. Baxter y King (1995) plantean que el uso de estos filtros es el resultado de una falta de atención a una cuestión central en la visión de Burns y Mitchell (1946), que es la definición de ciclo económico.

En particular, las críticas al filtro Hodrick - Prescott para extraer el componente cíclico han sido abundantes en la literatura económica. Harvey y Jaeger (1993) analizan las distorsiones del filtro y encuentran que pueden crear ciclos espúreos o distorsionar la estimación del componente cíclico de las series. Esta propiedad puede conducir a conclusiones erróneas sobre la relación entre los movimientos de corto plazo de las variables macroeconómicas.

Por su parte, Cogley y Nason (1995) plantean que si dicho filtro se aplica a datos cuyo proceso generador es estacionario en diferencias, las regularidades empíricas acerca de la periodicidad y los comovimientos respecto al ciclo de referencia pueden reflejar las propiedades del filtro y dicen poco acerca de las propiedades de la dinámica de los datos.

Park (1996) y Guay y St-Amant (1997) apoyan esta crítica y plantean que cuando una serie de tiempo que posee la "forma espectral típica" de Granger (1966) es filtrada mediante el procedimiento de Hodrick-Prescott, la serie *output tiene un pico redondeado en las* frecuencias asociadas al ciclo de negocios, y tal ciclo puede no encontrarse presente en la serie *input.*