GRUPO 1

Ejercicio 1

1. Determine el valor de k para el cual el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones. Luego escriba la solución con las infinitas soluciones para este valor de k:

$$\begin{cases} 8x - 3y &= 16 \\ x + ky &= 2 \end{cases}$$

Multiplicando por -8 la segunda ecuación y operando llegamos a:

$$\begin{cases} 8x - 3y &= 16 \quad (1) \\ x + ky &= 2 \quad (-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 3y &= 16 \\ -8x - 8ky &= -16 \end{cases} \Rightarrow -(3+8k)y = 0$$

Para que el sistema sea compatible e indeterminado $y \neq 0$, y por tanto $-(3+8k) = 0$, de lo cual $k = -\frac{3}{8}$.

$$S = \left\{ (x,y) | x = 2 + \frac{3}{8}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Una librería cuenta con dos sucursales, A y B. Según los registros, en el último mes se vendieron del texto "Un año de locos" 10 libros en la versión de bolsillo en la sucursal A y 5 libros de la versión tapa dura; en tanto, en la sucursal B se vendieron 12 libros de la versión de bolsillo y 16 de la tapa dura. Los ingresos por estas ventas ascienden a \$10.000 en la sucursal A y a \$22.000 en la sucursal B.

   a) Escriba una matriz $A_{2\times 2}$ donde las filas representen la cantidad de libros vendidos en cada una de las sucursales y las columnas las versiones del libro.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

   b) Escriba una matriz $b_{2\times 1}$ que contenga los ingresos por ventas de cada sucursal.

$$b = \begin{pmatrix} 10000 \\ 22000 \end{pmatrix}$$

   c) Resuelva la ecuación matricial $Ax = b$, y determine el precio de venta del texto "Un año de locos" en cada una de sus versiones.

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b \Rightarrow x = \frac{1}{10 \times 16 - 12 \times 5} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 22000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

   La versión de bolsillo cuesta \$500 y la de tapa dura cuesta \$1000.

Ejercicio 2

El Banco de Sangre está realizando una campaña de donación de sangre, debido a la baja cantidad que donantes que han tenido en los útlimos meses. La siguiente función describe la tasa a la que se reciben las donaciones de sangre:

$$d(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / d(t) = 30e^{-0,01t}$$

donde t indica la duración en días desde el inicio de la campaña de recolección de sangre y $d(t)$ es la tasa de donación de sangre medida en pintas donadas por día.

1. Calcular la cantidad de pintas donadas en los primeros quince días de campaña.

$$\int_0^{15} 30e^{-0,01t}dt = 30\frac{e^{-0,01t}}{-0,01}\bigg|_0^{15} = 30\left[\frac{e^{-0,01(15)}}{-0,01} - \frac{e^0}{-0,01}\right]$$
$$=30\left[-86,070 + 100\right] = 417,876$$

En los primeros 15 días de campaña se recolectan aproximadamente 418 pintas de sangre.

2. Supongamos que el Banco de Sangre inicia la campaña con un stock de 1000 pintas de sangre. Dar una expresión para la función $F(t)$ que describe la cantidad de pintas de sangre que dispone el Banco t días a partir del momento que inicia la campaña de donación.

$$F(t) = 1000 + D(t) - D(0) = 1000 + 30\left[\frac{e^{-0,01t}}{-0,01} + 100\right]$$
$$= 4000 - 3000e^{-0,01t}$$

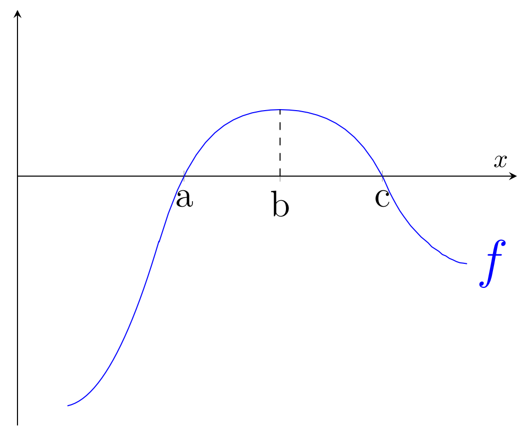
3. Si el objetivo es alcanzar un stock total de 2500 pintas de sangre. ¿Cuándo alcanzará el objetivo el Banco de Snagre?

$$F(t) = 4000 - 3000e^{-0,01t} = 2500$$
$$F(t) = -3000e^{-0,01t} = -1500 \Rightarrow e^{-0,01t} = 0,5 \Rightarrow -0,01t = \ln(0,5) \Rightarrow t = 69,31$$

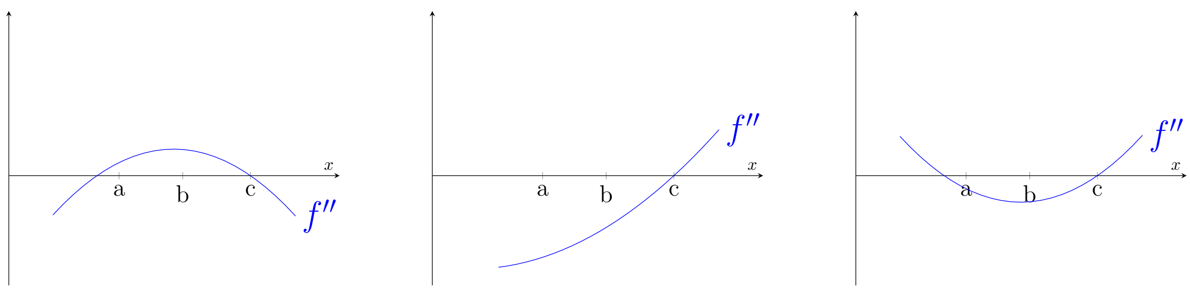
El stock de 2500 pintas de sangre se alcanzan cerca del día 70 de iniciada la campaña de donación.

Ejercicio 3

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con el siguiente bosquejo gráfico:



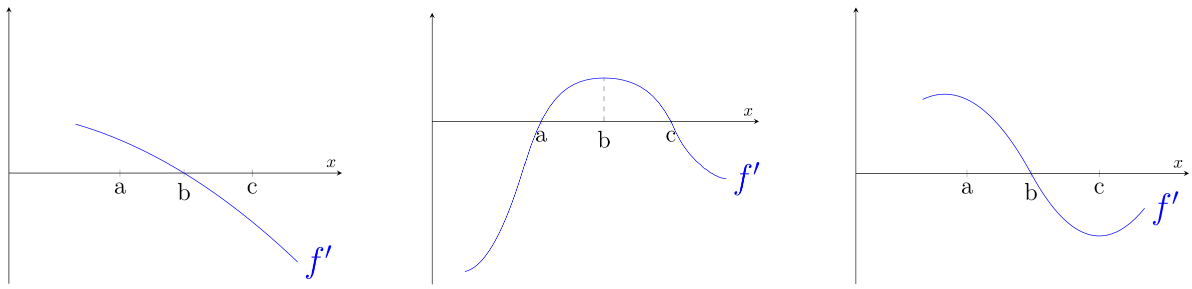
1. Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f''. Señalar los motivos para descartar las otras opciones.



(a) (b) (c)

El gráfico de f claramente tiene concavidad positiva en el intervalo $(c, +\infty)$. Ademas, existe algún valor $d < a$ para el cual f tiene concavidad negativa en (d, c) y concavidad positiva en $(-\infty, d)$. La opción que mejor ajusta es la c). La opción a) se descarta ya que es negativa en el intervalo $(c, +\infty)$ y la opción b) se descarta ya que es negativa en el intervalo $(-\infty, c)$

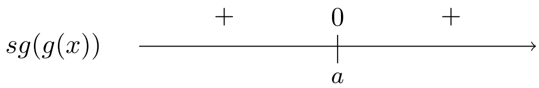
2. Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f'. Señalar los motivos para descartar las otras opciones.
(Sugerencia: es necesario tener en cuenta tanto el gráfico de f dado como el gráfico de f'' elegido anteriormente)



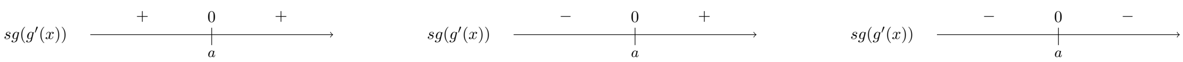
(a) (b) (c)

La función f crece en el intervalo $(-\infty, b)$ y decrece en el intervalo $(b, +\infty)$. Eso descarta la opción b).
Dado que f'' es positiva en $(c, +\infty)$ entonces f' debe crecer en dicho intervalo, esto descarta la opción a).
La opción correcta es la c).

3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con el siguiente diagrama de signo



Indicar cual de los siguientes diagramas de signo puede corresponder a g'



(a) (b) (c)

Si la opción a) fuera correcta, la función g debería crecer en el intervalo $(-\infty, a]$. Eso no sucede ya que g toma valores positivos para $x < a$ y $g(a) = 0$.
Si la opción c) fuera correcta, la función g debería decrecer en el intervalo $[a, +\infty)$. Eso no sucede ya que g toma valores positivos para $x > a$ y $g(a) = 0$.
La opción correcta es b).

Ejercicio 4
Considérese la siguiente función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x, y) = e^{x^2 y} + 3y^2 + by$$

1. Determinar el valor de b para que el punto $(1, 0)$ sea estacionario.

$$f_y(x, y) = x^2 e^{x^2 y} + 6y + b$$

Al evaluar en el punto $(1, 0)$ tenemos

$$1e^0 + b = 0$$
$$b = -1$$

2. Para el valor de b hallado en la parte anterior, identificar y clasificar todos los puntos estacionarios de f

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xye^{x^2y} & = 0 \\ f_y(x,y) = x^2e^{x^2y} + 6y - 1 & = 0 \end{cases}$$

A partir de la primer ecuación concluimos que $x = 0$ o $y = 0$.
<u>Caso $x = 0$</u>: sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 6y - 1 &= 0 \\ y &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

<u>Caso $y = 0$</u>: sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $x^2 - 1 = 0$ y por lo tanto $x = 1$ o $x = -1$.
En resumen, los puntos estacionarios son 3: $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(0,\frac{1}{6})$.
Las derivadas parciales segundas son:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2ye^{x^2y}(1 + 2yx^2) \\ f_{xy}(x,y) &= 2xe^{x^2y}(1 + x^2y) \\ f_{yy}(x,y) &= x^4e^{x^2y} + 6 \end{aligned}$$

Tenemos que $f_{xx}(0,\frac{1}{6}) = \frac{1}{3} > 0$ y $det\left(H_f((0,\frac{1}{6}))\right) = 2 > 0$, por lo tanto f alcanza un mínimo relativo en $(0,\frac{1}{6})$. Por otro lado $det\left(H_f((1,0))\right) = det\left(H_f((-1,0))\right) = -4 < 0$, lo que nos permite concluir que f tiene puntos silla en $(1,0)$ y $(-1,0)$.

Ejercicio 5

Un club de remo del interior del país cuenta con 250 afiliados al 31 de julio de 2021. Luego de la destacada actuación de los representantes uruguayos en la categoría de remo en los Juegos Olímpicos de Tokyo, esperan que la cantidad de afiliaciones crezca a la tasa de 2 % mensual durante los próximos dos años.

1. Determinar una expresión que describa la cantidad de afiliados por mes.

$$a_n = 250(1,02)^n \qquad 0 \leq n \leq 23$$

donde a_n representa la cantidad de afiliados al club de remo n meses a partir de fines de julio de 2021.

2. ¿En que momento el club cuenta con 335 afiliados?

$$250(1,02)^n = 335 \Rightarrow (1,02)^n = 1{,}34 \Rightarrow n = \frac{\ln(1{,}34)}{\ln(1{,}02)} = 14{,}77$$

3. La cuota que paga cada afiliado es de \$500 por mes. ¿Cuanto habrá recaudado por afiliaciones el club de remo en el primer año desde agosto de 2021?

$$\sum_{n=0}^{11} 500a_n = 500 \times 250 \sum_{n=0}^{11} 1{,}02^n = 125.000 \left(\frac{1 - 1{,}02^{12}}{1 - 1{,}02}\right) = 1.676.511{,}22$$

En el primer año luego de las olimpíadas el club de remo recaudará aproximadamente \$1.676.511.

4. ¿En qué momento, considerando desde comienzos de agosto de 2021, se alcanzará una recaudación de 2 millones de pesos?

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{k} 500a_n = 2.000.000\\
&125.000\sum_{n=0}^{k}(1{,}02)^n = 2.000.000\\
&\sum_{n=0}^{k} 1{,}02^n = 16 \Rightarrow \left(\frac{1-1{,}02^{k+1}}{1-1{,}02}\right) = 16\\
&1{,}02^{k+1} = 1{,}32 \Rightarrow (k+1)\ln(1{,}02) = \ln(1{,}32) \Rightarrow k \approx 13
\end{aligned}
$$

A los 13 meses desde finales de julio de 2021 se alcanzarán los 2 millones de recaudación (en los primeros días de setiembre de 2022).

GRUPO 2

Ejercicio 1

El MSP está realizando una campaña de vacunación. La siguiente función describe la tasa a la que se está vacunando a la población:

$$v(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}/v(t) = 6e^{0{,}25t}$$

donde t indica el tiempo medido en meses desde el inicio de la campaña de vacunación y $v(t)$ es la tasa de vacunación medida en miles de personas por mes.

Se pide:

1. Calcular la cantidad de vacunados en el primer mes de campaña.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 6e^{0{,}25t}dt = 6\frac{e^{0{,}25t}}{0{,}25}\Big|_0^1 &= 6\left[\frac{e^{0{,}25(1)}}{0{,}25} - \frac{e^0}{0{,}25}\right]\\
=&6\,[5{,}136 - 4] = 6{,}816
\end{aligned}
$$

   En el primer mes de campaña se vacunaron aproximadamente 6816 personas.

2. Suponga que al momento que se inicia la campaña de vacunación, ya se contaba con 40 mil voluntarios vacunados. Dar una expresión para la función $F(t)$ que describe la cantidad de vacunados t meses a partir del momento que inicia la campaña de vacunación.

$$
\begin{aligned}
F(t) =&20 + V(t) - V(0) = 40 + 6\left[\frac{e^{0{,}25t}}{0{,}25} - 4\right]\\
=&16 + 24e^{0{,}25t}
\end{aligned}
$$

3. Si el objetivo es vacunar a 1 millón de personas, incluyendo a los voluntarios vacunados inicialmente, ¿cuándo alcanzará el objetivo el MSP?

$$
\begin{aligned}
F(t) =&16 + 24e^{0{,}25t} = 1000\\
F(t) =&24e^{0{,}25t} = 984 \Rightarrow e^{0{,}25t} = 41 \Rightarrow 0{,}25t = \ln(41) \Rightarrow t = 14{,}85
\end{aligned}
$$

   El objetivo de vacunar a 1 millón de personas se alcanza casi a los 14.85 meses de iniciada la campaña de vacuanción.

Ejercicio 2

Cierto programa gubernamental dispone de un presupuesto mensual de \$600 millones en enero de 2021 y de \$661,5 millones en marzo del mismo año. Se sabe que el gobierno realiza un incremento mensual porcentual constante del dicho presupuesto.

1. Determinar una expresión que describa la evolución del presupuesto del programa a lo largo de los meses (a partir de enero de 2021)

$$600r^2 = 661{,}5$$
$$r = 1{,}05$$

$$a_n = 600(1{,}05)^n \text{ con } n \geq 0$$

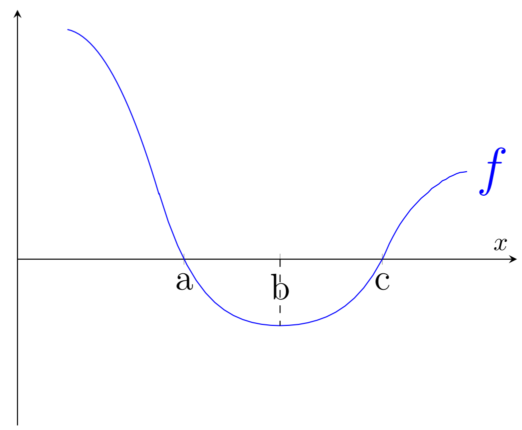
2. Calcular el dinero total destinado a este programa durante los años 2022 y 2023

$$\sum_{n=0}^{35} a_n - \sum_{n=0}^{11} a_n = 600\left(\frac{1{,}05^{36}-1}{1{,}05-1}\right) - 600\left(\frac{1{,}05^{12}-1}{1{,}05-1}\right)$$
$$= 47951,5 \text{ millones}$$

3. Determinar en que momento (considerando desde enero de 2021) el total de dinero destinado al programa alcanza los \$90.000 millones.

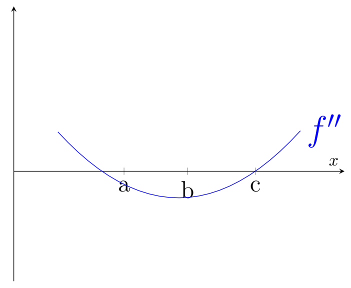
$$\sum_{n=0}^{k} a_n = 90000$$
$$k \approx 42{,}9$$

Ejercicio 3
Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con el siguiente bosquejo gráfico:

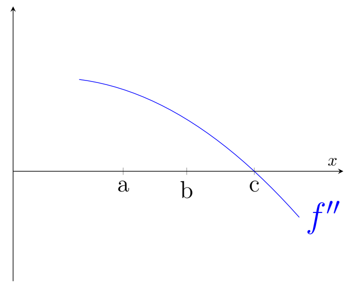


1. Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f''. Señalar los motivos para descartar las otras opciones.
   El gráfico de f claramente tiene concavidad negativa en el intervalo $(c, +\infty)$. Ademas, existe algún valor $d < a$ para el cual f tiene concavidad positiva en (d, c) y concavidad negativa en $(-\infty, d)$. La opción que mejor ajusta es la c). La opción a) se descarta ya que es positiva en el intervalo $(c, +\infty)$ y la opción b) se descarta ya que es positiva en el intervalo $(-\infty, c)$

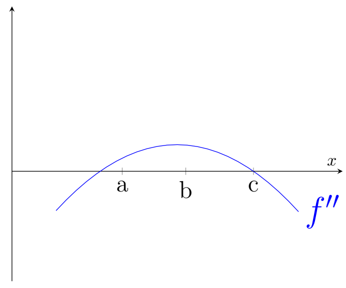
2. Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f'. Señalar los motivos para descartar las otras opciones.
   (Sugerencia: es necesario tener en cuenta tanto el gráfico de f dado como el gráfico de f'' elegido anteriormente)



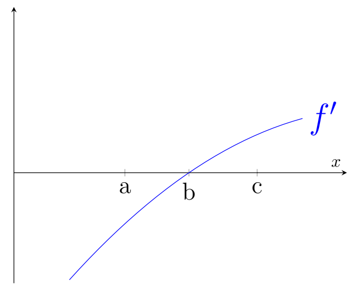
(a)



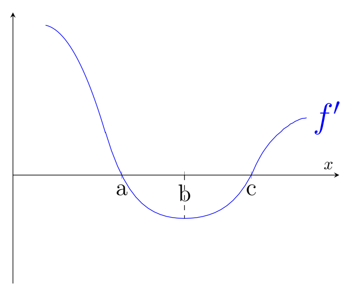
(b)



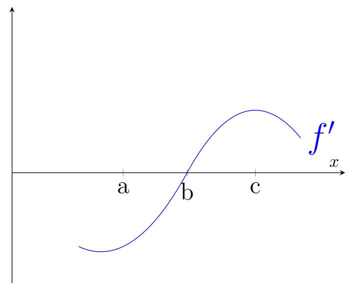
(c)



(a)



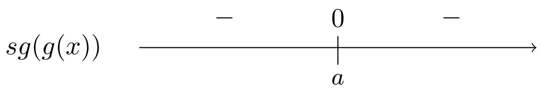
(b)



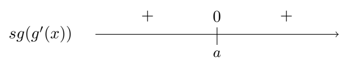
(c)

La función f decrece en el intervalo $(-\infty, b)$ y crece en el intervalo $(b, +\infty)$. Eso descarta la opción b). Dado que f'' es negativa en $(c, +\infty)$ entonces f' debe decrecer en dicho intervalo, esto descarta la opción a). La opción correcta es la c).

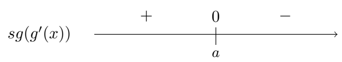
3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con el siguiente diagrama de signo



Indicar cual de los siguientes diagramas de signo puede corresponder a g'



(a)



(b)

(c)

Si la opción a) fuera correcta, la función g debería crecer en el intervalo $[a, +\infty)$. Eso no sucede ya que g toma valores negativos para $x > a$ al mismo tiempo $g(a) = 0$.
Si la opción c) fuera correcta, la función g debería decrecer en el intervalo $(-\infty, a]$. Eso no sucede ya que g toma valores negativos para $x < a$ al mismo tiempo $g(a) = 0$.
La opción correcta es b).

Ejercicio 4

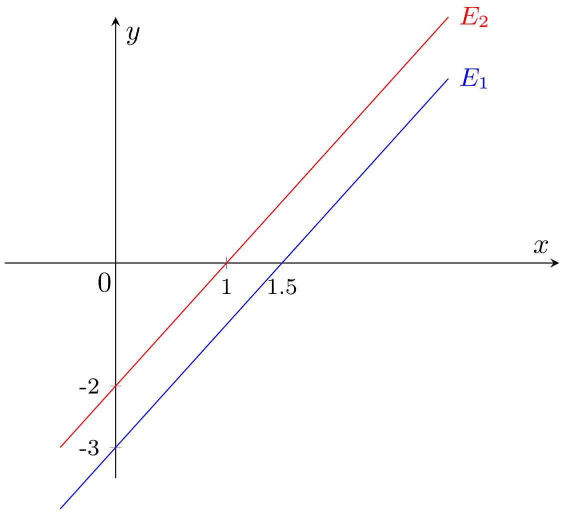
1. Determine el valor de k para el cual el siguiente sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. Para el valor de k hallado grafique la solución de ambas ecuaciones en un mismo par de ejes.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 2y & = & 6 \\ 8x + ky & = & 8 \end{array} \right.$$

Multiplicando por -2 la primer ecuación y operando llegamos a:

$$\left\{\begin{array}{rcrr} 4x-2y & = & 6 & (-2) \\ 8x+ky & = & 8 & (1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} -8x+4y & = & -12 \\ 8x+ky & = & 8 \end{array}\right. \Rightarrow (4+k)y=-4$$

Para que el sistema sea compatible e indeterminado $y \neq 0$, y por tanto $(4+k)=0$, de lo cual $k=-4$.



2. Una empresa realiza paseos por la costa los fines de semana. Según los registros, el último sábado tomaron el paseo unos 600 adultos y 400 niños, en tanto que el domingo tomaron el paseo 500 adultos y 300 niños. Los ingresos por estos viajes en este fin de semana ascendieron a \$12.800 el sábado y a \$10.400 el domingo.

   a) Escriba una matriz $A_{2\times 2}$ donde las filas representen las cantidad de personas que tomaron el paseo el sábado y el domingo, y las columnas la cantidad de adultos y niños.

   $$A = \begin{pmatrix} 600 & 400 \\ 500 & 300 \end{pmatrix}$$

   b) Escriba una matriz $b_{2\times 1}$ que contenga los ingresos los sábados y domingos.

   $$b = \begin{pmatrix} 12800 \\ 10400 \end{pmatrix}$$

   c) Resuelva la ecuación matricial $Ax=b$, y determine el costo del paseo por adulto y niño.

   $$Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b \Rightarrow x = \frac{1}{600\times 300 - 400\times 500}\begin{pmatrix} 300 & -400 \\ -500 & 300 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12800 \\ 10400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   El costo para adultos es de \$16 mientras que el de niños es \$8.

Ejercicio 5
Considérese la siguiente función

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x,y) = e^{y^2x} + 4x^2 + bx$$

1. Determinar el valor de b para que el punto $(0,2)$ sea estacionario.

$$f_x(x,y) = y^2e^{y^2x} + 8x + b$$

Al evaluar en el punto $(0,2)$ tenemos

$$\begin{aligned} 4e^0 + b &= 0 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

2. Para el valor de b hallado en la parte anterior, identificar y clasificar todos los puntos estacionarios de f

$$\begin{cases} f_y(x,y) = 2xye^{y^2x} & = 0 \\ f_x(x,y) = y^2e^{y^2x} + 8x - 4 & = 0 \end{cases}$$

A partir de la primer ecuación concluimos que $x = 0$ o $y = 0$.
Caso $y = 0$: sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 8x - 4 &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Caso $x = 0$: sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $y^2 - 4 = 0$ y por lo tanto $y = 2$ o $y = -2$.
En resumen, los puntos estacionarios son 3: $(0,2)$, $(0,-2)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$.
Las derivadas parciales segundas son:

$$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) &= 2xe^{y^2x}(1 + 2xy^2) \\ f_{xy}(x,y) &= 2ye^{y^2x}(1 + y^2x) \\ f_{xx}(x,y) &= y^4e^{y^2x} + 8 \end{aligned}$$

Tenemos que $f_{xx}(\frac{1}{2}, 0) = 8 > 0$ y $det\left(H_f(\frac{1}{2}, 0))\right) = 8 > 0$, por lo tanto f alcanza un mínimo relativo en $(\frac{1}{2}, 0)$. Por otro lado $det\,(H_f((0,2))) = det\,(H_f((0,-2))) = -16 < 0$, lo que nos permite concluir que f tiene puntos silla en $(0,2)$ y $(0,-2)$.