Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

Matemática II
Examen, 8 de diciembre de 2021

Nombre:____

C.I.: ____________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.

La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

¡Mucha suerte!

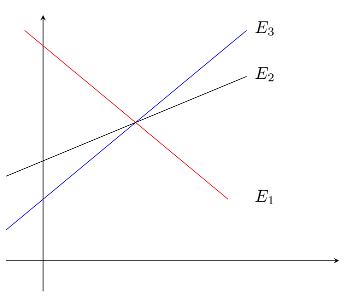
PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1 (20 puntos)

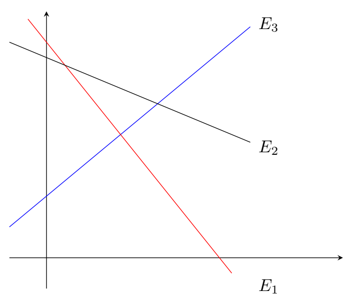
1. Considerese el siguiente sistema 3×2:

$$\begin{cases} x + 3y &= 5 \\ 3x + 2y &= 7 \\ 4x - 7y &= 8 \end{cases}$$

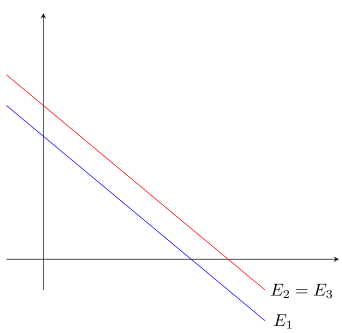
En las figuras presentadas más abajo se representa gráficamente las soluciones de distintas ecuaciones lineales pertenecientes a sistemas 3×2. Indicar cual es la representación que más se aproxima a la del sistema planteado anteriormente. Justifique su respuesta y por qué descarta cada una de las otras opciones.



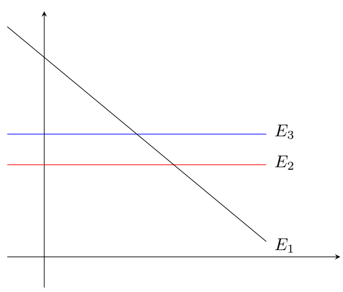
(a)



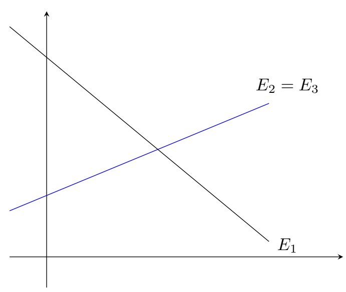
(b)



(c)



(d)



(e)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 5 \\ 3x+2y & = & 7 \\ 4x-7y & = & 8 \end{array}\right. \underset{E_3-3E_1}{\overset{E_2-4E_1}{\rightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 5 \\ -19y & = & -12 \\ -7y & = & -8 \end{array}\right. \underset{E_3-3E_1}{\overset{E_2-4E_1}{\rightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 5 \\ 19y & = & -12 \\ 0 & = & \frac{-68}{19} \end{array}\right.$$

El sistema es incompatible, eso elimina las opciones a) y e). Por otro lado, si consideramos los sistemas 2x2 tomando cualquier par de ecuaciones,

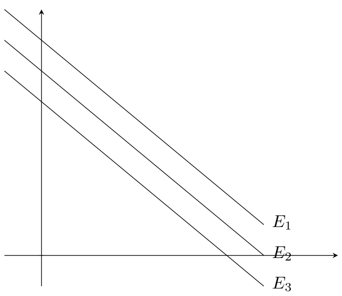
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 5 \\ 3x+2y & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 5 \\ 4x-7y & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 7 \\ 4x-7y & = & 8 \end{array}\right.$$

vemos que todos ellos son compatibles. Por lo tanto la opción correcta es la b)

2. Dar un ejemplo de un sistema 3×2 de forma tal que las soluciones de sus ecuaciones tengan una representación similar a la siguiente. Justificar



(a)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \\ x+y & = & 3 \end{array}\right.$$

Cualquier sistema 2xe formado por un par de las ecuaciones anteriores es incompatible

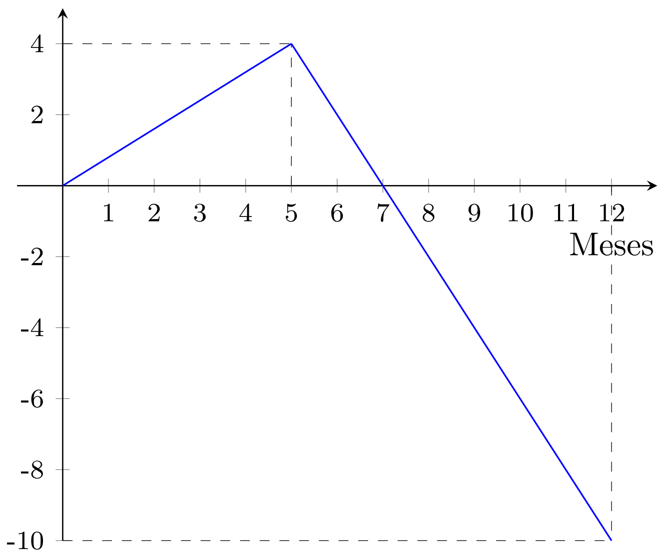
<u>Ejercicio 2</u> (25 puntos)

Una mutualista registra la tasa de afiliaciones/desafiliaciones durante el año 2021

$$f:[0,12]\to\mathbb{R}/f(t)=\left\{\begin{array}{rcl} 0{,}8t & si & 0\leq t<5 \\ -2t+14 & si & 5\leq t\leq 12 \end{array}\right.$$

donde t son meses a partir de comienzos de enero de 2021 y $f(t)$ es la tasa de afilaciones (miles de usuarios/mes).

1. Representar gráficamente la función f.



2. Calcular la variación neta de afiliados a la mutualista desde comienzos de enero hasta finales de junio

$$\begin{aligned}\int_0^6 f(t)dt &= \int_0^5 f(t)dt + \int_5^6 f(t)dt\\ &= \int_0^5 0{,}8tdt + \int_5^6 -2t+14dt\\ &= 10+3\\ &= 13\end{aligned}$$

3. Suponiendo que la mutualista cuenta con 70000 afiliados a comienzos de enero, ¿en que momento la mutualista tiene 74900 afiliados?
   El primer momento T es cuando

$$\begin{aligned}74{,}9 &= 70 + \int_0^T 0{,}8tdt\\ 74{,}9 &= 70 + 0{,}4t^2 \mid_0^T\\ 12{,}25 &= T^2\\ T &= \pm 3{,}5\end{aligned}$$

   Descartamos el valor negativo y nos quedamos con $T = 3{,}5$.
   La cantidad de afiliados baja en el período $[7, 12]$, por lo tanto puede haber una solución ahí.

$$\begin{aligned}74{,}9 &= 70 + \int_0^5 0{,}8tdt + \int_5^T -2t+14dt\\ 74{,}9 &= 70 + 10 - T^2 + 14T - 45\end{aligned}$$

   De la última ecuación obtenemos las soluciones $T \approx 3{,}98$ (que descartamos ya que no pertenece al intervalo $[7, 12]$) y $T \approx 10{,}01$

4. ¿En que momento del año 2021 la mutualista alcanza el máximo de afiliados? Justifique
   La cantidad de afiliados de la mutualista crece en el período $[0, 7]$ y decrece en el período $[7, 12]$. Por lo tanto, el máximo de afiliado se alcanza en $T = 7$ que corresponde a comienzos de agosto.

Ejercicio 3 (20 puntos)

En los modelos colectivos el poder de negociación de hombres y mujeres dentro del hogar, se puede resumir por lo que se llama el "peso de Pareto". Este peso es una función que depende de los ingresos relativos de los miembros de la pareja, los cuales suman uno. La siguiente función resume el poder de negociación de las mujeres:

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / P(x, y) = -3y^2 - x^2 + 12xy - 2$$

donde $P(x, y)$ está medido en unidades, $x \in (0, 1)$ es la proporción de ingresos de la mujer en el ingreso total del hogar e $y \in (0, 1)$ la de los hombres. Cuando la función toma valores negativos los hombres tienen mayor poder que las mujeres, y cuando la función toma valores positivos pasa lo contrario. En función de estos datos se pide:

1. Calcule $P(0{,}4; 0{,}6)$ y $P(0{,}5; 0{,}5)$ e interprete los resulatdos en el contexto de este ejercicio.

$$P(0{,}4; 0{,}6) = -3(0{,}6)^2 - (0{,}4)^2 + 12(0{,}6)(0{,}4) - 2 = -0{,}36$$
$$P(0{,}5; 0{,}5) = -3(0{,}5)^2 - (0{,}5)^2 + 12(0{,}6)(0{,}4) - 2 = 0$$

Cuando la proporción de ingresos del hombre es de 0.6 y de la mujer es de 0.4, el poder de negociación de las mujeres es -0.36 unidades inferior al poder de negociación de los hombres. En cambio, cuando la proporción de ingresos de las mujeres es igual a la de los hombres, el poder de negociación es igual para ambos.

2. Escriba la restricción que indica que la suma de ingresos relativos de cada miembro de la pareja suman 1.
$x + y = 1$

3. Determine el punto que cumpliendo la restricción mencionada anteriormente, maximiza el peso de Pareto. Plantee el problema como uno de maximización restringida y justifique adecuadamente su respuesta.

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & -3y^2 - x^2 + 12xy - 2 \\ \text{s.a} \quad & x + y = 1 \end{aligned}$$

Despejando $y = 1 - x$ de la restricción y sustituyendo en la función objetivo, obtenemos:

$$\begin{aligned} h(x) &= -3(1-x)^2 - x^2 + 12x(1-x) - 2 \\ h'(x) &= 6(1-x) - 2x + 12x(-1) + 12(1-x) \\ &= 6 - 6x - 2x - 12x + 12 - 12x = 0 \\ &= -32x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{18}{32} \Rightarrow y = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

	0		$\frac{18}{32}$		1
$sg(L'(x))$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$

El poder de negociación de las mujeres alcanza su máximo cuando la proporción de ingresos que aportan al hogar es 0.5625 y los hombres de 0.4375. En ese punto, el poder de negociación de las mujeres es de 0,0625 unidades.

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4 (18 puntos)

La función de costo medio de una reconocida bodega está descrita por la siguiente función:

$$Cme : [1, +\infty) \to \mathbb{R}/Cme(x) = 2x + \frac{3200}{x} + 10$$

donde $Cme(x)$ mide el costo medio en miles de pesos por mes, y x la cantidad barricas que se producen al mes, y donde $x \geq 1$.

1. ¿Cuál es el costo medio de producir 5 barricas de vino al mes?

   $Cme(x = 5) = 2(5) + \frac{3200}{5} + 10 = 660$
   El costo de producir 5 barricas al mes es de 660 mil pesos.

2. Determine la cantidad de barricas de vino que debe producir la bodega para minimizar el costo medio de producción. Justifique por qué el punto hallado es un mínimo.

$$Cme'(x) = 2 - \frac{3200}{x^2} = \frac{2x^2 - 3200}{x^2}$$

$$sg(2x^2 - 3200) \quad \begin{array}{ccccc} + & 0 & - & 0 & + \\ \hline & -40 & & 40 & \end{array}$$

$$sg(x^2) \quad \begin{array}{ccc} + & 0 & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$sg(Cme'(x)) \quad \begin{array}{ccccc} \nexists & & - & 0 & + \\ \hline & 1 & & 40 & \end{array}$$

El costo medio se minimiza cuando se producen 40 barricas de vino, que implica un costo de 170 mil pesos por barrica de vino.

3. Haga un estudio analítico de la función Cme y realice el bosquejo gráfico correspondiente.

$Cme(x) = 0 \Rightarrow$ No existen raíces reales por lo que la función no corta el eje de las x.

$$\lim_{x \to 1^+} = 2x + \frac{3200}{x} + 10 = 3212$$
$$\lim_{x \to +\infty} = 2x + \frac{3200}{x} + 10 = +\infty$$
$$Cme'(40) = 0$$
$$Cme(40) = 170$$
$$Cme''(x) = 3200\frac{2}{x^3} > 0 \forall x \geq 1$$

$$sg(Cme''(x)) \quad \begin{array}{cccc} \nexists & & + & + \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Una representación gráfica posible de Cme es la siguiente (no se respetan las escalas)

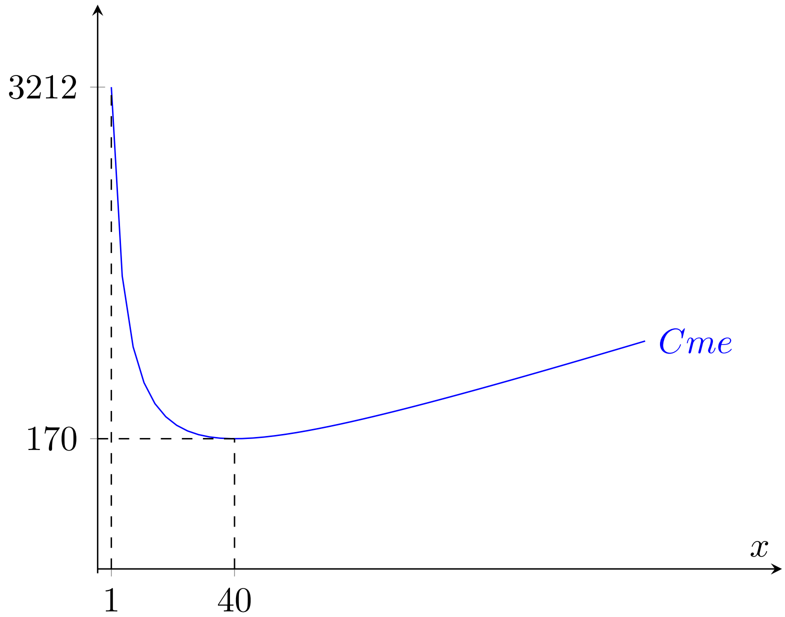


Figura 1

Ejercicio 5 (17 puntos)

Una institución de salud recibe en enero del 2021 1500 nuevas afiliaciones mensuales. La cantidad de afiliaciones mensuales crece un 15 % cada mes hasta junio de 2022 (inclusive), pero se mantiene constante a partir de julio de 2022.

1. Calcular la cantidad total de nuevos afiliados a la institución durante el año 2021.

$$\sum_{n=0}^{11} a_n = \sum_{n=0}^{11} 1500(1{,}15)^n = 43502{,}5$$

2. Calcular la cantidad total de nuevos afiliados desde comienzos del 2021 hasta finales del 2023.

$$\sum_{n=0}^{35} a_n = \sum_{n=0}^{17} a_n + \sum_{n=18}^{35} a_n = 113754{,}5 + 16141{,}9(18) = 334056{,}7$$

3. ¿En que mes la cantidad de afiliaciones mensuales es de 9.230?

$$1500(1{,}15)^n = 9230$$
$$n = log_{1{,}15}\left(\frac{9230}{1500}\right)$$
$$n \approx 13$$

4. ¿En que momento la cantidad total de afiliaciones (contando desde enero 2021) alcanza las 226.700?
Si llamamos k a la cantidad de meses transcurridos a partir de junio del 2022, entonces

$$226700 = 113754{,}5 + k16141{,}9$$
$$k \approx 7$$

Por lo tanto se alcanzara un total de 226700 en el mes $n = k + 17 \approx 24$