

Nombre: _____

C.I.: _____ Libre Reglamentado

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.

La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

¡Mucha suerte!

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1 (20 puntos)

El complejo de apartamentos “La ola verde” tiene 110 apartamentos de 2 dormitorios para alquilar. Los beneficios mensuales que obtiene el complejo están dados por la función:

$$L : [0, 110] \rightarrow \mathbb{R}/L(x) = x^3 - 145x^2 + 4.850x - 35.000$$

donde $L(x)$ mide los beneficios mensuales, en miles de pesos, que obtiene el complejo, y x es la cantidad de apartamentos que alquila por mes. En base a esta información se pide:

1. Calcule $L(0)$ e interprete el resultado.
2. Determine la cantidad de unidades que debe alquilar el complejo para maximizar el beneficio mensual. Justifique por qué el punto hallado es un máximo.
3. ¿Cuál es el máximo beneficio que puede obtener el complejo?

Ejercicio 2 (25 puntos)

Un país registra su tasa de inmigración y a partir de esos datos el gobierno construye un modelo predictivo que describe la evolución de dicha tasa a lo largo del tiempo.

$$i : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}/i(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{4}{t}$$

donde $t = 1$ corresponde a comienzos del 2021, $t = 2$ corresponde a comienzos del 2022 e $i(t)$ es la tasa de inmigración al país (en millones de inmigrantes/año)

1. Calcule la variación neta de inmigrantes en el país entre comienzos del 2023 y finales del 2024.
2. Sabiendo que a comienzos del 2022 la cantidad total de inmigrantes en el país es de 4 millones, dé una expresión para la función que describe la cantidad de inmigrantes del país a lo largo del tiempo.
3. ¿En que momento el país tiene la menor cantidad de inmigrantes? Justifique su respuesta.
4. ¿Que predice este modelo que sucederá con la cantidad de inmigrantes en el país a largo plazo?

Ejercicio 3 (20 puntos)

La tasa de fecundidad mide la cantidad de niños nacidos en un año en relación a la cantidad de mujeres en edad reproductiva (entre 14 y 49 años). En Uruguay, se ha observado una disminución de la tasa de fecundidad, llegando a su mínimo histórico de 1.4 hijos por mujer en 2020. Diversos estudios apuntan que esta reducción se debe principalmente al descenso de la fecundidad entre las mujeres más jóvenes el tiempo que se espera para tener el segundo hijo. La siguiente función describe la tasa de fecundidad en Uruguay:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = 0,2x^2 + 0,1y^2 - 0,8x - 0,4y - 0,1xy + 2$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$, x es la cantidad promedio de hijos que tienen las mujeres de entre 14 y 19 años e y es la cantidad de tiempo promedio que se espera para tener el segundo hijo (medido en años). En base a esta información, se pide:

1. Determine la tasa de fecundidad en Uruguay si la cantidad de hijos promedio que tienen las mujeres de entre 14 y 19 años es de 0.05 y el tiempo promedio que se espera para tener el segundo hijo es de 2 años.
2. Calcule $f_y(0,05; 2)$ e interprete los resultados en el contexto de este ejercicio.
3. Determine y clasifique los puntos estacionarios de la función f .

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4 (18 puntos)

1. Una persona gastó un total de 48 dólares en la compra de unos auriculares, una taza y un libro. Si el precio de los auriculares se redujera a la sexta parte, el de la taza a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, esta persona pagaría un total de 8 dólares por ellos. Calcular el precio de los auriculares, de la taza y del libro, sabiendo que los auriculares cuestan lo mismo que el total de la taza y el libro.
2. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule la matriz inversa de A .
- b) Resuelva la siguiente ecuación matricial: $AX = b$, donde $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5 (17 puntos)

El Ministerio de Medio Ambiente está desarrollando un programa abocado a que los hogares realicen la primer etapa del reciclaje. La fase de prueba del programa finalizó en diciembre de 2020 e incluía a 5.000 hogares. La expansión del programa comenzó el 1ro de enero de 2021 y tendrá una duración de 5 años. Se estima que la cantidad de hogares dentro del programa crecerá al 15% mensual. En base a esta información, se pide:

1. Determine una expresión que describa la cantidad de hogares que se unen al programa por mes.
2. ¿En qué momento el programa alcanza los 10.000 hogares?
3. El Ministerio valora que cada hogar que se une al programa reduce los costos de gestión de basura en \$10 por mes. ¿Cuánto ahorrará el Ministerio en gestión de basura en los primeros dos años de ejecución del programa?