Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

Matemática II
Examen, 25 de febrero de 2022

Nombre:____

C.I.: ________________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.

La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

¡Mucha suerte!

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1 (20 puntos)

El complejo de apartamentos "La ola verde" tiene 110 apartamentos de 2 dormitorios para alquilar. Los beneficios mensuales que obtiene el complejo están dados por la función:

$$L : [0, 110] \to \mathbb{R} / L(x) = x^3 - 145x^2 + 4.850x - 35.000$$

donde $L(x)$ mide los beneficios mensuales, en miles de pesos, que obtiene el complejo, y x es la cantidad de apartamentos que alquila por mes. En base a esta información se pide:

1. Calcule $L(0)$ e interprete el resultado.

   $L(0) = -35.000$, los costos fijos de no alquilar ningún apartamento del complejo son 35 millones de pesos.

2. Determine la cantidad de unidades que debe alquilar el complejo para maximizar el beneficio mensual. Justifique por qué en el punto hallado hay un máximo.

   $$L'(x) = 3x^2 - 290x + 4.850$$
   $$L'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 290x + 4.850 = 0 \Rightarrow x \approx 75{,}2 \quad x \approx 21{,}5$$

$sg(L'(x))$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$
	0		21,5		75,2		110

   La función L presenta un máximo relativo en 21,5. Dado que la función crece a partir de 75,2 para determinar el máximo absoluto debemos evaluar qué sucede con la función en el 110.

   $$L(21{,}5) = (21{,}5)^3 - 145(21{,}5)^2 + 4.850(21{,}5) - 35.000 \approx 12.187$$
   $$L(110) = (110)^3 - 145(110)^2 + 4.850(110) - 35.000 = 75.000$$

   Por lo tanto, para maximizar el beneficio mensual el complejo debería alquilar todos los apartamentos ($x = 110$).

3. ¿Cuál es el máximo beneficio que puede obtener el complejo?

   Los beneficios máximos son de 75 millones de pesos, que se obtienen al alquilar todos los apartamentos.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Un país registra su tasa de inmigración y a partir de esos datos el gobierno construye un modelo predictivo que describe la evolución de dicha tasa a lo largo del tiempo.

$$i : [1, +\infty) \to \mathbb{R} / i(t) = \frac{2}{t^2} + \frac{4}{t}$$

donde $t = 1$ corresponde a comienzos del 2021, $t = 2$ corresponde a comienzos del 2022 e $i(t)$ es la tasa de inmigración al país (en millones de inmigrantes/año)

1. Calcular la variación neta de inmigrantes en el país entre comienzos del 2023 y finales del 2024.

   Consideremos la siguiente primitiva de i

   $$G(t) = 4ln(t) - \frac{2}{t}$$

   entonces

   $$\int_3^5 i(t)dt = G(5) - G(3) \approx 2{,}31$$

   Durante el período considerado la cantidad de inmigrantes en el país aumenta en 2.310.000 aproximadamente.

2. Sabiendo que a comienzos del 2022 la cantidad total de inmigrantes en el país es de 4 millones, dar una expresión para la función que describe la cantidad de inmigrantes del país a lo largo del tiempo.

   Buscamos una función I que cumpla

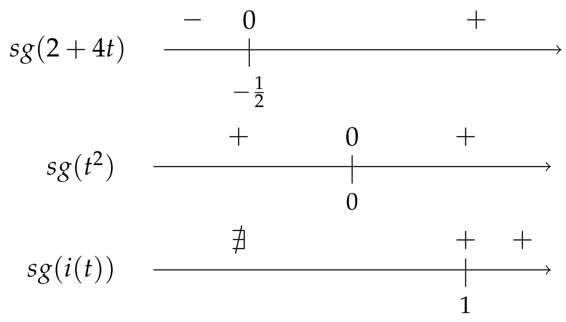
   $$\begin{aligned} I(t) &= G(t) + k \\ I(2) &= 4 \end{aligned}$$

   por lo tanto

   $$4ln(2) - 1 + k = 4 \implies k \approx 2{,}227$$

3. ¿En que momento el país tiene la menor cantidad de inmigrantes? Justifique

   $$i(t) = \frac{2 + 4t}{t^2}$$



   Como i tiene signo positivo, entonces la función I es creciente. Por lo tanto, el mínimo se alcanza en $t = 1$. Lo cual corresponde a comienzos de 2021.

4. ¿Que predice este modelo que sucederá con la cantidad de inmigrantes en el país a largo plazo?

   Tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} 4ln(t) = +\infty$$
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2}{t} = 0$$

   por lo tanto,

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} 4ln(t) - \frac{2}{t} = +\infty$$

   El modelo predice que la cantidad de inmigrantes en el país crecerá sin alcanzar techo.

Ejercicio 3 (20 puntos)

La tasa de fecundidad mide la cantidad de niños nacidos en un año en relación a la cantidad de mujeres en edad reproductiva (entre 14 y 49 años). En Uruguay, se ha observado una disminución de la tasa de fecundidad, llegando a su mínimo histórico de 1.4 hijos por mujer en 2020. Diversos estudios apuntan que esta reducción se debe principalmente al descenso de la fecundidad entre las mujeres más jóvenes el tiempo que se espera para tener el segundo hijo. La siguiente función describe la tasa de fecundidad en Uruguay:

$$f : D \to \mathbb{R} / f(x,y) = 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2 - 0{,}8x - 0{,}4y - 0{,}1xy + 2$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$, x es la cantidad promedio de hijos que tienen las mujeres de entre 14 y 19 años e y es la cantidad de tiempo promedio que se espera para tener el segundo hijo (medido en años). En base a esta información, se pide:

1. Determine la tasa de fecundidad en Uruguay si la cantidad de hijos promedio que tienen las mujeres de entre 14 y 19 años es de 0.05 y el tiempo promedio que se espera para tener el segundo hijo es de 2 años.

$$f(0{,}05, 2) = 0{,}2(0{,}05)^2 + 0{,}1(2)^2 - 0{,}8(0{,}05) - 0{,}4(2) - 0{,}1(0{,}05)(2) + 2 = 1{,}555$$

   Cuando la tasas de fecundidad adolescente es de 0.05 y la cantidad de años que se espera en promedio para tener al segundo hijo es de 2, la tasa de fecundidad es de 1,555 hijos por mujer.

2. Calcule $f_y(0{,}05; 2)$ e interprete los resultados en el contexto de este ejercicio.

$$f_y(x,y) = 0{,}2y - 0{,}4 - 0{,}1x \Rightarrow f_y(0{,}05; 2) = 0{,}2(2) - 0{,}4 - 0{,}1(0{,}05) = -0{,}005$$

   Partiendo de una tasa de fecundidad adolescente de 0.05 y un promedio de 2 años en tener el segundo hijo, por cada año que aumenta el intervalo de tiempo que se espera para tener el segundo hijo, dejando constante la tasa de fecundidad adolescente, la tasa de fecundidad disminuye en aproximadamente 0.005 hijos por mujer.

3. Determine y clasifique los puntos estacionarios de la función f.

$$\begin{cases} f_x & = 0{,}4x - 0{,}8 - 0{,}1y = 0 \\ f_y & = 0{,}2y - 0{,}4 - 0{,}1x = 0 \Rightarrow x = 0{,}2y - 0{,}4 \Rightarrow 0{,}4(0{,}2y - 0{,}4) - 0{,}8 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2{,}4}{0{,}7} \quad x = \frac{2}{0{,}7}$$

   El punto estacionario es $\left(\frac{2}{0{,}7}; \frac{2{,}4}{0{,}7}\right)$.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 0{,}4 \\ f_{xy} &= fyx = -0{,}1 \\ f_{yy} &= 0{,}2 \end{aligned} \Rightarrow H\left(\frac{20}{7}; \frac{24}{7}\right) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H) = 0{,}07$$

   Dado que el determinante del hessiano es mayor a cero, y que $f_{xx} > 0$, la función D tiene un mínimo relativo en el punto estacionario $\left(\frac{20}{7}; \frac{24}{7}\right)$.

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4 (18 puntos)

1. Una persona gastó un total de 48 dólares en la compra de unos auriculares, una taza y un libro. Si el precio de los auriculares se redujera a la sexta parte, el de la taza a la tercera parte y el del libro a la séptima parte de sus respectivos precios iniciales, esta persona pagaría un total de 8 dólares por ellos. Calcular el precio de los auriculares, de la taza y del libro, sabiendo que los auriculares cuestan lo mismo que el total de la taza y el libro.

   - x=auriculares, y=taza, z=libro

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =48 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{7}z & =8 \\ x-y-z & =0 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1+E_3} \left\{\begin{array}{rl} x+y+z & =48 \\ \frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{7}z & =8 \\ x & =24 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} y+z & =24 \\ \frac{1}{3}y+\frac{1}{7}z & =4 \end{array}\right. \xrightarrow{\frac{-1}{3}E_1+E_2} \left\{\begin{array}{rl} y+z & =24 \\ \frac{-4}{21}z & =-4 \end{array}\right. \longrightarrow z=21, y=3$$

   Los auriculares le costaron 24 dólares, la taza 3 y el libro 21.

2. Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule la matirz inversa de A.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

   b) Resuelva la siguiente ecuación matricial: $AX=b$, donde $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$AX=b \longrightarrow X=A^{-1}b$$

$$A^{-1}b=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5 (17 puntos)

El Ministerio de Medio Ambiente está desarrollando un programa que busca que los hogares realicen la primer etapa del reciclaje. La fase de prueba del programa finalizó en diciembre de 2020 e incluía a 5.000 hogares. La expansión del programa comenzó el 1ro de enero de 2021 y tendrá una duración de 5 años. Se estima que la cantidad de hogares que se adhieren al programa crecerá al 15 % mensual. En base a esta información, se pide:

1. Determinar una expresión que describa la cantidad de hogares que se unen al programa por mes.

   $h(n)=5000(1+0{,}15)^n$, donde $n=0,1,2,3,...,60$ y $n=0$ es diciembre de 2020.

2. ¿En qué momento el programa alcanzará los 10.000 hogares?

   $h(n) = 5000(1 + 0{,}15)^n = 10000 \Rightarrow 1{,}15^n = 2 \Rightarrow n \log 1{,}15 = \log 2 \Rightarrow n \approx 4{,}95$. Los 10 mil hogares se alcanzan a fines del mes de mayo de 2020.

3. El Ministerio valora que cada hogar que se une al programa, reduce los costos de gestión de basura en $10 por mes. ¿Cuánto ahorrará el Ministerio en gestión de basura en los primeros dos años de ejecución del programa?

$$\sum_{n=0}^{23} 10h(n) = 10 \sum_{n=0}^{23} 5000(1{,}15)^n = 50000 \left(\frac{1 - 1{,}15^2 4}{1 - 1{,}15} \right) \approx 9.208.392$$

   En los primeros dos años del programa, el ministerio ahorrará aproximadamente unos 9.2 millones de pesos.