Matemática II
Examen, 1ro de agosto de 2022

Nombre:____

C.I.: ____________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma <u>reglamentada</u> deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma <u>libre</u> deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.

La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

¡Mucha suerte!

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1 (20 puntos)

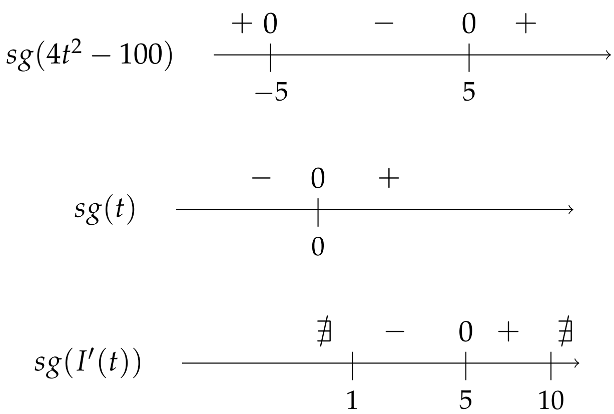
Un centro educativo de enseñanza terciaria está por abrir un nuevo programa y estima que la evolución de las inscripciones se podría expresar mediante la siguiente función:

$$I : [1, 10] \to \mathbb{R} / I(t) = 2t^2 - 100\ \ln(t) + 250$$

donde I es la cantidad de matriculados en cada año t, y $t = 1$ corresponde al año 2019, año en que se abre el nuevo programa.

1. ¿Cuándo se alcanza el mínimo número de inscripciones según este modelo? ¿Cuántos estudiantes se inscribirán ese año? Justifique por qué el punto hallado es un mínimo.

$$I'(t) = 4t - 100\frac{1}{t} = \frac{4t^2 - 100}{t}$$



La función I presenta un mínimo relativo y absoluto en 5 en el intervalo [1,10]. La cantidad mínima de matriculados se alcanzará en 2023 y será de aproximadamente 139 estudiantes.

2. ¿Cuándo se alcanza el máximo número de inscriptos? ¿Cuántos estudiantes serán en esa generación?

   La máxima cantidad de inscriptos se puede dar en $t = 1$ o en $t = 10$.

$$I(1) = 2(1)^2 - 100\ \ln(1) + 250 = 252$$
$$I(10) = 2(10)^2 - 100\ \ln(10) + 250 \approx 219$$

   Por lo tanto, la máxima cantidad de inscriptos se alcanza el año de inicio del programa, el 2019, y contará con una inscripción estimada de 252 estudiantes.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Como parte de un programa de control de calidad, los juegos de ajedrez que produce la empresa "Gambito" está sujeto a un control antes de su empaque final. La tasa de incremento en el número de juegos controlados por hora por un inspector t horas entre las 8:00 y las 12:00 se puede aproximar por:

$$g : [0, 4] \to \mathbb{R} / g(t) = -3t^2 + 12t + 180$$

donde $t = 0$ corresponde a las 8:00 de la mañana y $t = 4$ corresponde a las 12:00 del mediodía.

1. Determine la tasa de controles de juegos de azar a las 9 y a las 11 de la mañana.

   A las 9 de la mañana se controlan $g(1) = -3(1)^2 + 12(1) + 180 = 189$ juegos de ajedrez y a las 11 $g(3) = -3(3)^2 + 12(3) + 180 = 189$.

2. Calcule el número de piezas que controla un inspector entre las 8 de la mañana y las 12 del mediodía.

   Una primitiva de g es:
$$G(t) = -t^3 + 6t^2 + 180t$$
   entonces
$$\begin{aligned}\int_0^4 g(t)dt &= G(4) - G(0) \\ &= -(4)^3 + 6(4)^2 + 180(4) - 0 = 752\end{aligned}$$

   Entre las 8 de la mañana y las 12 del mediodía cada inspector controla 752 juegos de ajedrez.

3. Sabiendo que a las 10 de la mañana se cuenta con 536 juegos controlados (entre lo que se hizo en este turno y el de la madrugada), dé una expresión para la función que describe la cantidad de juegos que se controlan en un día.

   Buscamos una función C que cumpla
$$C(t) = G(t) + k$$
$$C(2) = 536$$
   por lo tanto
$$-(2)^3 + 6(2)^2 + 180(2) + k = 536 \implies k = 160$$
   y $C(t) = -t^3 + 6t^2 + 180t + 160$

4. ¿En qué momento la cantidad de controles de juegos de ajedrez es mínimo? Justifique su respuesta.

$$C'(t) = g(t) = -3t^2 + 12t + 180$$

$$sg(C'(t)) \qquad \begin{array}{ccccc} \nexists & & + & & \nexists \\ \hline & 0 & & 4 & \end{array}$$

Como g tiene signo positivo en el intervalo [0,4], entonces la función C es creciente en dicho intervalo, por lo que la mínima cantidad de controles se realiza en $t = 0$, cuando comienza el turno de la mañana.

Ejercicio 3 (20 puntos)

Una empresa de logística esa diseñando un contenedor en el cual distribuir 4 tipos de productos de ayuda humanitaria. Se deben cumplir ciertas restricciones por parte de los pesos de cada producto individual para que el diseño del empaquetado sea correcto:

- El peso del producto A sumado a dos veces el peso del producto B junto con una vez el peso del producto C deben totalizar 6 kg.
- Dos veces el peso del producto B sumado con 3 veces el peso del producto C superan el peso del producto D en 2 kg.
- El peso del producto A supera en 3 kg a la suma del producto D junto con 2 veces el producto C.

1. Plantear las restricciones anteriores como un sistema de ecuaciones, clarificarlo y resolverlo (en caso de ser posible)

$$\begin{cases} a + 2b + c &= 6 \\ 2b + 3c - d &= 2 \\ a - 2c - d &= 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3 - E_1} \begin{cases} a + 2b + c &= 6 \\ 2b + 3c - d &= 2 \\ -2b - 3c - d &= -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2 + E_3} \begin{cases} a + 2b + c &= 6 \\ 2b + 3c - d &= 2 \\ -2d &= -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow S\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / d = \frac{1}{2}, c \in \mathbb{R}, b = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}c, a = \frac{7}{2} + 2c\}$$

El sistema es compatible indeterminado.

2. Considérese la siguiente afirmación: “*Si un sistema lineal de ecuaciones tiene más variables que ecuaciones entonces el sistema es compatible indeterminado.*"Determinar si la afirmación anterior es verdadera o falsa. Justifique su respuesta en caso de ser verdadera o de un contraejemplo en caso de ser falsa.
Falso. Un contraejemplo posible es el siguiente sistema incompatible

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + y + x &= 2 \end{cases}$$

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4 (18 puntos)
Un consumidor dispone de dos bienes de consumo (bien **A** y bien **B**). Conocemos la siguiente función de utilidad del consumidor

$$U : D \to \mathbb{R} / U(a,b) = b^3 e^{a^2}$$

donde $D = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 3\}$, a representa la cantidad de unidades del bien **A** consumidas y b la cantidad de unidades del bien **B** consumidas.

Supongamos que cada unidad del producto **A** cuesta 2 dolares y cada unidad del producto **B** cuesta 1 dolar. Si el consumidor dispone de 7 dolares de presupuesto (que gasta en su totalidad), queremos determinar el consumo que debe realizar para maximizar su utilidad. Plantear el problema como uno de optimización restringida y resolverlo.

$$max\ U(a,b)$$

$$\text{sujeto a } 2a + b = 7$$

$$U(a, 7-2a) = (7-2a)^3 e^{a^2} = h(a)$$

El problema original se reduce a determinar el máximo absoluto de h en el intervalo $[0,3]$.

$$\begin{aligned} h'(a) &= 3(-2)(7-2a)^2 e^{a^2} + (7-2a)^3 2a e^{a^2} \\ &= 2(7-2a)^2 e^{a^2}(-3 + 7a - 2a^2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & \nexists & - & - & 0 & + & 0 & \nexists \\ \hline sg\ f(t) & & 0 & & \frac{1}{2} & & 3 & \end{array}$$

Como $h(0) = 343$ y $h(3) \approx 8103$ concluimos que el máximo absoluto se alcanza en $a = 3$. Por lo tanto la solución al problema original es el par $(a,b) = (3,1)$.

Ejercicio 5 (17 puntos)

Un club gestionó la vuelta de un reconocido jugador al fútbol uruguayo. Mediante este traspaso, se prevé que el club obtenga ingresos por la venta de remeras de este jugador. A fines de julio de 2022 la venta de remeras del club era de 1.000 y se estima que esta cantidad aumente en un 150 % mensualmente a partir de agosto y por el lapso de un año. En base a esta información, se pide:

1. Determine una expresión que describa la cantidad de remeras que se prevé vender por mes.
   $r(n) = 1.000(1+1{,}5)^n$, donde $n = 0,1,2,3,...,12$ y $n = 0$ es julio de 2022.

2. ¿Cuántas remeras se venderán a los dos meses de la llegada del jugador?
   $r(2) = 1.000(1+1{,}5)^2 = 6.250$. A los dos meses se venden 6250 remeras.

3. ¿En qué momento se venderán 20 mil remeras?

$$\begin{aligned} r(n) &= 1.000(1+1{,}5)^n = 20.000 \\ &= 2{,}5^n = 20 \Rightarrow n\ln(2{,}5) = \ln(20) \\ n &= 3{,}27 \end{aligned}$$

El club venderá 20 mil remeras cerca del 10 de noviembre de este año.

4. ¿Cuántas remeras se venderán entre comienzos de julio del 2022 y fines de diciembre de 2023?

$$\sum_{n=0}^{16} r(n) = \sum_{n=0}^{16} 1.000(2{,}5)^n = 1.000\left(\frac{1-2{,}5^{16}}{1-2{,}5}\right) = 1.552.203{,}6$$

En los 17 meses se venderán aproximadamente 1.552.204 remeras.