Nombre:____

C.I.: ______________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.
La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.
¡Mucha suerte!

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1 (20 puntos)

El comité de un llamado para proveer empleos en una empresa pública espera una inscripción al concurso de 8.000 jóvenes. Para cumplir una cuota por género, del total de postulantes se seleccionaran 239 hombres y 230 mujeres. Los postulantes se han clasificado según su sexo y lugar de residencia. El número de jóvenes en cada categoría viene dado por la matriz:

	Montevideo	Interior
Hombres	2700	1300
Mujeres	3000	1000

1. Escriba la tabla anterior como una matriz A. A su vez, escriba la cantidad de hombres y mujeres que ingresaran a la empresa como un vector columna b, donde el primer elemento es la cantidad de hombres y el segundo la cantidad de mujeres.

2. Sabemos que la proporción de hombres de Montevideo que ingresaran es la misma que la de mujeres de Montevideo. De la misma forma, la proporción de hombres del Interior que ingresaran es la misma que la de mujeres del interior que lo harán. Determinar el valor de esas proporciones. Sugerencia: en primer lugar plantee el problema como una ecuación matricial para luego resolverla.

3. Si las cuotas de ingreso para Montevideo e Interior fueran de 0,10 y 0,06, respectivamente, ¿cuántos hombres y mujeres ingresarían en el llamado?

Solución

1. Las matriz A y el vector columna b están dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 2700 & 1300 \\ 3000 & 1000 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 239 \\ 230 \end{pmatrix}$$

2. El problema a resolver es: $Ax = b$, donde x representa la proporción de hombres y de mujeres que ingresarán en Montevideo e interior. La solución del problema enconces:

$$x = A^{-1}b = \frac{-1}{1{,}200{,}000}\begin{pmatrix} 1000 & -1300 \\ -3000 & 2700 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 239 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}08 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto, la cuota de ingreso en Montevideo es de 0,05 de los inscriptos y en interior del país del 0,08.

3. Si las cuotas son de 0,10 y 0,06, entonces:

$$C = A\begin{pmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 348 \\ 360 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto, ingresarían 348 hombres y 360 mujeres.

Ejercicio 2 (25 puntos)

Una empresa se instala en el país a comienzos del 2022 y dispone de un modelo predictivos sobre la evolución de sus utilidades. El modelo es el siguiente

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / f(t) = 1 - 2e^{1-t/3}$$

donde t corresponde a la cantidad de meses a partir del inicio de actividades de la empresa y $f(t)$ corresponde a la tasa de utilidades (en millones de dólares/mes) en el tiempo t.

1. ¿Cuál es el saldo neto de utilidades durante el primer semestre del 2022 (desde comienzos de enero hasta finales de junio)?
2. ¿Es correcto afirmar que la empresa sufrió pérdidas durante todos los meses del período mencionado en la parte 1)?
3. La empresa comienza sus actividades con un fondo de 20 millones de dólares. Suponiendo que los fondos de la empresa dependen exclusivamente de las utilidades de la misma, construir la función que describe la cantidad de fondos de la empresa en tiempo t.
4. ¿Que predice el modelo que sucederá con los fondos de la empresa a largo plazo?

Solución

1. Consideramos una primitiva de f

$$G : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / G(t) = t + 6e^{1-t/3}$$

   entonces

$$\int_0^6 f(t)dt = G(6) - G(0) \approx -8{,}1$$

   La empresa tiene perdidas netas de aproximadamente 8,1 millones de dólares durante el primer semestre de 2022.

2. El diagrama de signo de f es el siguiente

$$\begin{array}{lcccccc} & \nexists & | & - & 0 & + & \\ sg\, f(t) & \text{———} & + & \text{———} & + & \text{———} & \to \\ & & 0 & & 5{,}1 & & \end{array}$$

Donde 5,1 es la solución de la ecuación $f(t) = 0$. Por lo tanto la afirmación es falsa ya que durante casi todo junio la empresa tuvo ganancias.

3. Si $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es la función de fondos de la empresa, se cumple

$$\begin{aligned} F(0) &= 20 \\ F'(t) &= f(t) \\ F(t) &= G(t) + k \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $k = 20 - 6e \approx 3{,}69$, por lo tanto

$$F(t) = t + 6e^{1-t/3} + 20 - 6e$$

4. Sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} t &= +\infty \\ \lim_{t\to+\infty} 6e^{1-t/3} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$ y concluimos que el modelo predice que los fondos de la empresa se incrementaran sin techo en el largo plazo.

Ejercicio 3 (20 puntos)

Los beneficios semanales (en dólares) que obtiene una empresa de la producción y venta de kits musicales están determinados por la función:

$$B : D \to \mathbb{R} / B(x, y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 220, 0 \leq y \leq 70\}$, x representa al número de kits producidos por semana e y el número de kits que se venden cada semana.

1. Determine y clasifique los puntos estacionarios de la función B.
2. Calcule $B_x(200, 50)$ e interprete en el contexto de este ejercicio.
3. Determine los beneficios semanales que puede obtener esta empresa si produce lo hallado en el punto 1 de este ejercicio.

Solución

1. Las derivadas de primer orden de la función de beneficios son:

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{2}{4}x - \frac{1}{4}y + 120 = 0 \\ B_y &= -\frac{6}{8}y - \frac{1}{4}x + 100 = 0 \end{aligned}$$

Por lo que resolviendo el sistema nos queda:

$$\begin{cases} \frac{2}{4}x + \frac{1}{4}y &= 120 \\ -\frac{2}{4}x - \frac{6}{4}y &= -200 \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{4}y = -80 \Rightarrow y = 64 \Rightarrow x = 208$$

El único punto estacionario que tiene esta función se da en el par (208,64). Para determinar si se trata de un mínimo o un máximo relativo armamos la matiz Hessiana a partir de las derivadas segundas:

$$B_{xx} = -\frac{1}{2}$$
$$B_{xy} = B_{yx} = -\frac{1}{4}$$
$$B_{yy} = -\frac{3}{4}$$

Por lo que $B_{xx} < 0$ y $det(H) = 5/16 > 0$, lo que hace que en el punto (208,64) exista un máximo relativo.

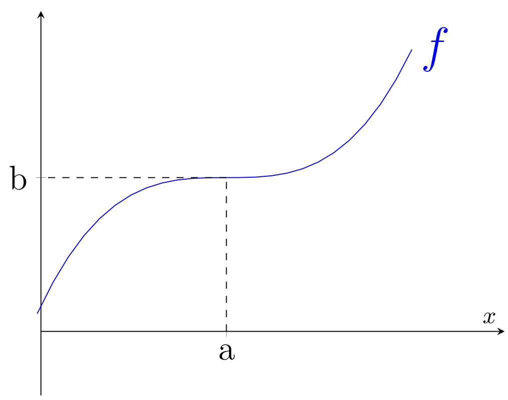
2. $B_x(200, 50) = -\frac{2}{4}x - \frac{1}{4}y + 120 = -\frac{1}{2}200 - \frac{1}{4}50 + 120 = 7{,}5$. Cuando la empresa produce 200 kits por semana y vende 50 por semana, cuando aumenta en una unidad la cantidad producida de kits, los beneficios de la empresa aumentan en 7,5 dólares semanales.

3. Si la empresa produce 208 kits y vende 64 unidades por semana, los beneficios que alcanza son de 10680 dólares por semana.

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

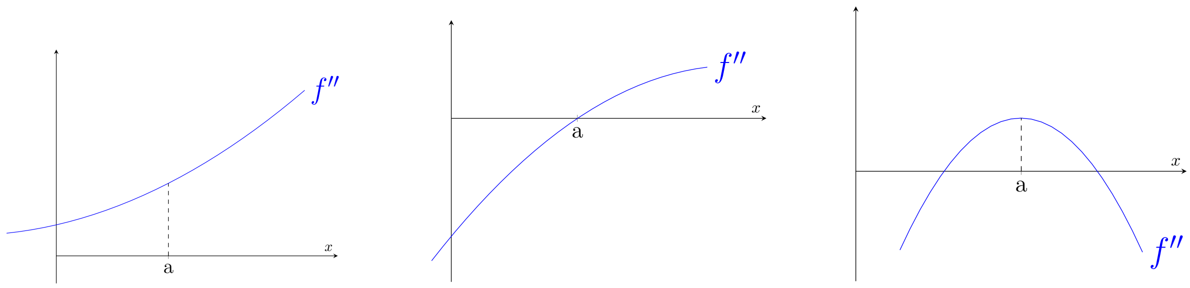
Ejercicio 4 (20 puntos)

Consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con el siguiente bosquejo gráfico:

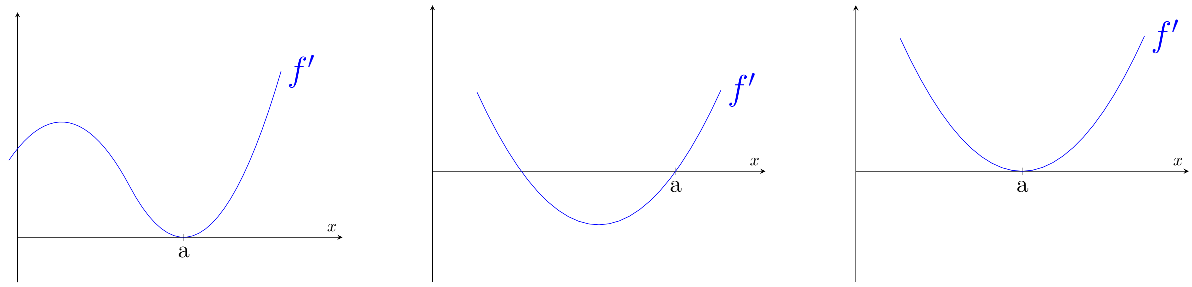


1. Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f''. Señalar los motivos para descartar las otras opciones.
   El gráfico de f claramente tiene concavidad negativa en el intervalo $(-\infty, a)$ y concavidad positiva en el intervalo $(a, +\infty)$. La opción a) se descarta ya que tiene signo positivo en el intervalo $(0, a)$ Por otro lado, la opción c) se descarta ya que hay un valor d que cumple $a < d$ y f'' tiene signo negativo en el intervalo $(d, +\infty)$. La opción correcta es la b).

2. Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f'. Señalar los motivos para descartar las otras opciones.
   (Sugerencia: es necesario tener en cuenta tanto el gráfico de f dado como el gráfico de f'' elegido anteriormente)



(a) (b) (c)



(a) (b) (c)

La opción b) tiene signo negativo en el intervalo (d, a) con $0 < d < a$, si esta fuera la opción correcta la función f debería decrecer en (d, a) lo cual no es cierto. Si a) fuera la opción correcta, entonces f'' debería tener 2 raíces (una en $x = a$ y otra en $x = d$ para un valor $d < a$) lo cual sabemos que no es cierto. La opción correcta es la c).

Ejercicio 5 (15 puntos)

Un club de fútbol inicia una campaña de afiliaciones en enero de 2022 para aumentar su cuerpo de socios. Dicha campaña genera un aumento porcentual constante en la cantidad de socios. A finales de enero de ese año el club cuenta con 2000 afiliados y a finales de marzo cuenta con 2205 afiliados.

1. Dar una expresión para la sucesión que describe la cantidad de socios del club a lo largo del tiempo.

   Dado que la cantidad de socios aumenta porcentualmente de forma constante, la sucesión es geométrica $s_n = s_0 r^n$ donde

$$s_0 = 2000$$
$$s_2 = s_0 r^2 = 2205$$

   entonces

$$r^2 = \frac{2205}{2000} = 1{,}1025$$
$$r = 1{,}05$$

   y finalmente obtenemos $s_n = 2000(1{,}05)^n$

2. Sabiendo que la cuota social del club es de US$ 2 mensuales. Determinar en que momento el club habrá recaudado US$ 120.000 en total (considerando desde el comienzo de la

campaña en enero del 2022). (*Nota: en caso de no obtener una expresión en la parte 1), invente una y trabaje con ella*)

$$\begin{aligned}
2\left(\sum_{n=0}^{k} s_n\right) &= 120000\\
2\left(2000\left(\frac{1{,}05^{k+1}-1}{1{,}05-1}\right)\right) &= 120000\\
1{,}05^{k+1} &= 2{,}5\\
k &\approx 17{,}8
\end{aligned}$$

A finales de junio del 2023 se alcanzaran los 120000 dólares de recaudación.

3. Determinar el monto total recaudado por el club desde comienzos del 2023 hasta finales del 2024.(*Nota: en caso de no obtener una expresión en la parte 1), invente una y trabaje con ella*)

$$\begin{aligned}
2\left(\sum_{n=12}^{35} s_n\right) &= 2\sum_{n=0}^{35} s_n - 2\sum_{n=0}^{11} s_n\\
&= 2\left(2000\left(\frac{1{,}05^{36}-1}{1{,}05-1}\right)\right) - 2\left(2000\left(\frac{1{,}05^{12}-1}{1{,}05-1}\right)\right)\\
&\approx 319676{,}8
\end{aligned}$$

Durante los años 2023 y 2024 se recaudan aproximadamente 319677 dólares.