Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

Matemática II
Examen, 10 de febrero de 2023

Nombre:____

C.I.: ______________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.
La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.
¡Mucha suerte!

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1 (25 puntos)
Las utilidades de cierto negocio a partir de comienzos del a no 2020 se corresponden con el siguiente modelo

$$U : [1, +\infty) \to \mathbb{R} / U(t) = ln\left(\frac{t^2 - 2t + 2}{t}\right) + 3$$

donde $U(t)$ corresponde a la utilidad (en miles de dólares) en tiempo t. Donde t esta medido en años y $t = 1$ corresponde a comienzos del 2021.

1. Determinar en que momento la utilidad alcanza su valor mínimo.
   Tenemos que la derivada de U es

   $$U'(t) = \frac{t^2 - 2}{t(t^2 - 2t + 2)}$$

   Ademas, el diagrama de signo de la misma es

   $$\begin{array}{cccccc} & \nexists & & - & 0 & + \\ sg\ U'(t) & & 1 & & \sqrt{2} & \end{array}$$

   Por lo tanto, podemos concluir que el mínimo absoluto de utilidades se alcanza en $t = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.

2. ¿Que podemos afirmar sobre el máximo absoluto de la función U?
   Tenemos que

   $$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 - 2t + 2}{t} = +\infty$$

   y por lo tanto

   $$\lim_{t \to +\infty} U(t) = +\infty$$

   Esto implica que la función U no tiene máximo absoluto.

Ejercicio 2 (20 puntos)

Una empresa está evaluando la instalación de paneles solares, lo que le permitirá reducir el consumo de combustible. Los paneles costará \$32.000 dólares. El departamento de ingeniería estima que los ahorros logrados se realizarán a la tasa de $s(t)$ dólares por año, donde:

$$s : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / s(t) = 20.000e^{-0,5t}$$

donde t denota el tiempo medido en años desde la instalación de los paneles solares.

1. ¿Cuál será el ahorro de la empresa en los primeros dos años de funcionamiento de los paneles?

$$\int_0^2 s(t)dt = G(2) - G(0) = 40.000(1 - e^{-1}) \approx 25.285$$

El ahorro durante los dos primeros años es de aproximadamente 25.285 dólares.

2. Determine cuánto tardará la empresa en recuperar el costo de los paneles (es decir, cuándo los ahorros acumulados de combustible equivaldrán al costo de compra).

$$\begin{aligned} \int_0^x 20.000e^{-0,5t}dt &= -40.000e^{-t}\big|_0^x = 32.000 \\ &\Rightarrow -40.000e^{-0,5x} + 40.000 = 32.000 \\ &\Rightarrow e^{-0,5x} = 0,2 \Rightarrow -0,5x = \ln(0,2) \Rightarrow x = 3,218 \end{aligned}$$

Se recupera el costo de los paneles solares pasados los 3 años y 2 meses de instalación.

3. Suponiendo que al momento de colocar los paneles solares la empresa no contaba con ahorros, dé una expresión para la función que describe el monto de ahorro que la empresa consigue a lo largo del tiempo t.

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F'(t) &= s(t) \\ F(t) &= G(t) + k \Rightarrow F(0) = G(0) + k \\ &\Rightarrow 0 = -40.000e^0 + k \Rightarrow k = 40.000 \\ &\Rightarrow F(t) = -40.000e^{-0,5t} + 40.000 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (20 puntos)

Una empresa estima que su utilidad mensual es una función de la cantidad de dinero que destina mensualmente a I+D (x) y a la importación de nuevas tecnologías (y). La función de utilidad es:

$$B : D \to \mathbb{R} / B(x, y) = -5x^2 - y^2 + 4xy + 16x + 10y$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 60\}$, B es la utilidad mensual (en miles de dólares), y tanto x como y indican el gasto mensual, tanto en I+D como en la importación de nuevas tecnologías, respectivamente (ambos en miles de dólares). El presupuesto mensual para estas inversiones es de \$60.000, y se debe cumplir que por cada dólar que invierten en tecnología, deben destinarse dos dólares a I+D.

1. Plantee el problema como un problema de maximización restringida.

$$\begin{aligned} \text{máx } B(x, y) &= -5x^2 - y^2 + 4xy + 16x + 10y \\ \text{sujeto a: } & 2x + y = 60 \end{aligned}$$

2. Calcule la inversión que debería realizar la empresa con objeto de maximizar la utilidad mensual. Justifique por qué el punto hallado es un máximo.
   El problema original se reduce a determinar el máximo absoluto de h en el intervalo $[0, 30]$.

$$\begin{aligned} h(x) &= -5x^2 - (60-2x)^2 + 4x(60-2x) + 16x + 10(60-2x) \\ h'(x) &= -10x - 2(60-2x)(-2) + 4(60-2x) + 4x(-2) + 16 + 10(-2) \\ &= 476 - 34x = 0 \Rightarrow x = 14 \Rightarrow y = 32 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & \nexists & + & + & 0 & - & - & \nexists \\ sg\, h'(t) & & 0 & & 14 & & 30 & \end{array}$$

   Por lo tanto, $x = 14$ es un máximo absoluto. La empresa debe invertir 14 mil dólares en I+D y 32 mil dólares en importación de tecnologías.

3. Determine la utilidad mensual que obtiene esta empresa si maximiza su utilidad mensual.
   Si la empresa maximiza su utilidad, entonces obtendrá $B(14, 32) = 332$ mil dólares de utilidad.

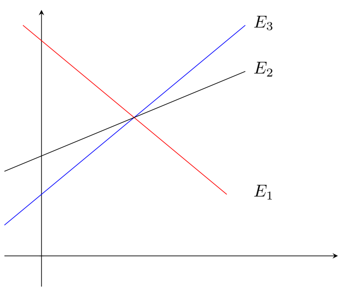
SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4 (20 puntos)

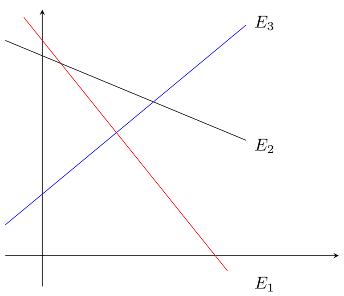
1. Considerese el siguiente sistema 3×2:

$$\begin{cases} 6x - y &= \frac{3}{4} \\ 4x - 2y &= 1 \\ -12x + 2y &= -\frac{3}{2} \end{cases}$$

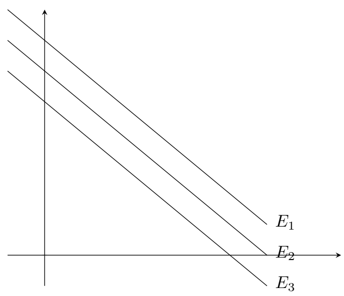
En las figuras presentadas más abajo se representa gráficamente las soluciones de distintas ecuaciones lineales pertenecientes a sistemas 3×2. Indicar cual es la representación que más se aproxima a la del sistema planteado anteriormente. Justifique su respuesta y por qué descarta cada una de las otras opciones.



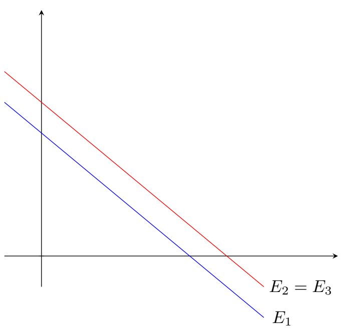
(a)



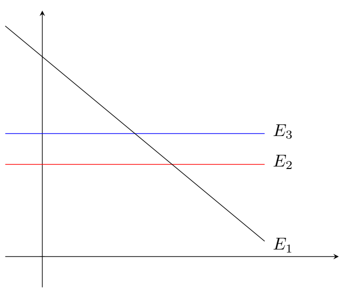
(b)



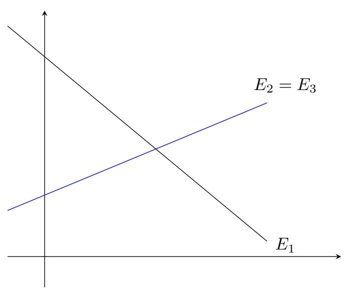
(c)



(d)



(e)



(f)

Las soluciones de E_1 y E_3 son iguales ya que $E_3 = -2E_1$. Esto descarta las opciones a), b), c) y e). Ademas, el sistema

$$\begin{cases} 6x - y &= \frac{3}{4} \\ 4x - 2y &= 1 \end{cases}$$

es compatible determinado, ya que su solución es el par $(\frac{1}{16}, -\frac{3}{8})$. Esto ultimo descarta la opción d). La opción correcta es la f).

2. Considerese el siguiente sistema 2×2 con parámetro k:

$$\begin{cases} 6x - 2y &= 8 \\ kx + y &= 2 \end{cases}$$

Clasificarlo y resolverlo, discutiendo según el valor de k.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6x-2y & = & 8 \\ kx+y & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{\frac{1}{2}E_1} \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 4 \\ kx+y & = & 2 \end{array}\right. \xrightarrow{E_1+E_2} \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 4 \\ 3x+kx & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 4 \\ (3+k)x & = & 6 \end{array}\right.$$

si $k=-3$ el sistema resulta incompatible ya que tenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 4 \\ 0 & = & 6 \end{array}\right.$$

Ejercicio 5 (15 puntos)

Una casa de venta de artículos electrodomésticos mantiene un registro mes a mes de la cantidad de artículos vendidos. La casa inaugura sus locales a comienzos de 2023 y durante el mes de enero venden 500 artículos en total. Las ventas se ven incrementadas en un 4 % mensual durante todo el 2023 y 2024. Pero a comienzos de 2025 las mismas se estancan y se mantienen en el mismo valor.

1. Plantear una expresión para la sucesión que describe la evolución de ventas mes a mes.

$$a_n = \left\{\begin{array}{rcl} 500(1{,}04)^n & \text{si} & 0 \leq n \leq 23 \\ 1232{,}36 & \text{si} & 24 \leq n \end{array}\right.$$

2. Estimar el total de artículos vendidos desde comienzos del 2023 hasta finales del 2024.

$$\sum_{n=0}^{23} a_n = 500\frac{(1{,}04)^{24}-1}{1{,}04-1} \approx 19541$$

3. Determinar en que momento las ventas habrán alcanzado los 14000 artículos.
   A partir del cálculo en 2) sabemos que la solución k se obtiene en los primeros 2 años, por lo tanto resolvemos

$$\sum_{n=0}^{k} a_n = 14000$$

$$500\left(\frac{1{,}04^{k+1}-1}{1{,}04-1}\right) = 14000$$

$$k \approx 18{,}2$$

   A comienzos de Agosto de 2024 se alcanzaran los 14000 artículos vendidos.

4. Determinar en que momento las ventas habrán alcanzado los 32000 artículos.

En este caso sabemos que $k \geq 24$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} a_n &= 32000 \\
\sum_{n=0}^{23} a_n + \sum_{24}^{k} a_n &= 32000 \\
19541 + \sum_{24}^{k} 1232{,}36 &= 32000 \\
\sum_{24}^{k} 1232{,}36 &= 12459 \\
1232{,}36(k-23) &= 12459 \\
k &\approx 33{,}1
\end{aligned}$$

A comienzos de Noviembre de 2025 se alcanzaran los 14000 artículos vendidos.