Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

Nombre:____

C.I.: __________________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.
La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1

Un comerciante se prepara a realizar una serie de reformas en su negocio, para ello consulta a un economista que realiza -en base al tipo de producto y mercado- una proyección de ingresos mensuales con el nuevo formato de negocio. El modelo proyectado es:

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / \; f(t) = \frac{-12t^2 - t - 14}{(t+2)^3} + 5$$

donde $f(t)$ es el ingreso en miles de dólares y t representa el tiempo medido en meses desde la reestructura del negocio.

1. Calcular el ingreso mínimo que prevé el modelo y el momento en que éste se alcanza.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(-24t-1)(t+2)^3 - (-12t^2 - t - 14)3(t+2)^2}{(t+2)^6} \\ &= \frac{(-24t-1)(t+2) - (-12t^2 - t - 14)3}{(t+2)^4} \\ &= \frac{12t^2 - 46t + 40}{(t+2)^4} \end{aligned}$$

el diagrama de signo de f' es:

$sg\, f'(t)$	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
		0		$4/3$			$5/2$	

$f(0) \approx 3{,}25$ y $f(2{,}5) \approx 3{,}99$, por lo tanto el mínimo absoluto de ingreso se alcanza al comenzar el período pos reestructura y es de 3250 dolares aproximadamente.

2. Al pasar el tiempo, ¿existe algún techo para los ingresos? Justificar.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-12t^2 - t - 14}{(t+2)^3} + 5 = \lim_{t \to +\infty} \frac{-12t^2}{t^3} + 5 = 0 + 5 = 5$$

Como el límite anterior es finito y la función f es continua en $[0, +\infty)$, concluimos que los ingresos tienen un techo.

3. Determinar, el máximo absoluto de los ingresos durante los primeros dos años.
   Tenemos que determina el máximo absoluto de f en $[0, 24]$. A partir del diagrama de signo de f' vemos que dicho máximo se alcanza en $t = \dfrac{4}{3}$ o en $t = 24$.
   $f(\frac{4}{3}) \approx 4,01$
   $f(24) \approx 4,6$
   Entonces el ingreso máximo es de aproximadamente 4600 dolares y se alcanza al final del segundo año.

Ejercicio 2

A comienzos de 2023 se funda un nuevo equipo de fútbol europeo con fondos quataries. A través de una minuciosa campaña de afiliación, los gerentes del club construyen una proyección de la velocidad de afiliaciones mensuales. La misma está dada por la función:

$$f : [0, 20] \to \mathbb{R} / f(t) = \begin{cases} 3 + 2t & , \quad 0 \leq t \leq 5 \\ -2t + 23 & , \quad 5 < t \leq 20 \end{cases}$$

donde t representa los meses a partir de enero del 2023 ($t = 0$) y $f(t)$ representa la velocidad de afiliaciones (en miles/mes) t meses a partir del 2023. Tener presente que el club no cuenta con ningún afiliado a comienzos de 2023.

Se pide:

1. Calcular el saldo neto de afiliaciones durante los primeros 6 meses.

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(t)dt &= \int_0^5 f(t)dt + \int_5^6 f(t)dt \\ &= \int_0^5 (3 + 2t)dt + \int_5^6 (-2t + 23)dt \\ &= (3t + t^2)|_0^5 + (-t^2 + 23t)|_5^6 \\ &= 40 + 12 = 52 \end{aligned}$$

   Durante los primero 6 meses hubo un saldo neto de 52 mil afiliaciones.

2. ¿En que momento se alcanzaran los 70 mil afiliados?
   Tenemos que resolver la siguiente ecuación

$$70 = \int_0^T f(t)dt$$

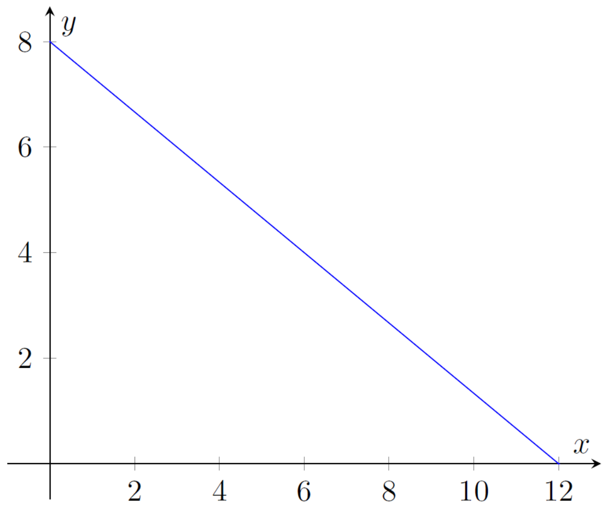
   A partir del calculo de la parte anterior, sabemos que el momento T en que se alcanzan los 70 mil afiliados es posterior a los 6 meses. Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} 70 &= \int_0^5 f(t)dt + \int_5^T f(t)dt \\ 70 &= 40 + (-t^2 + 23t)|_5^T \\ 0 &= -120 + 23T - T^2 \end{aligned}$$

   Las soluciones son $T = 8$ y $T = 15$, por lo tanto se alcanzan a finales de agosto del 2023 y finales de marzo del 2024.

Ejercicio 3

1. Si el individuo va a gastar todo su presupuesto en entradas para ver partidos, el conjunto de posibilidades del consumidor está dado por el segmento azul en el siguiente gráfico:



2. El problema se puede plantear como:

$$\begin{aligned} &\text{Máximizar } U(x,y) = x^3 y \\ &\text{sujeto a } 50x + 75y = 600 \end{aligned}$$

3. Resolvemos por sustitución: A partir de la restricción obtenemos $y = \dfrac{600-50x}{75}$ y al sustituir en la función U resulta

$$f(x) = U\left(x, \frac{600-50x}{75}\right) = x^3\left(\frac{600-50x}{75}\right)$$

El problema entonces se reduce a determinar el máximo absoluto de f en el intervalo $[0,12]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\left(\frac{600-50x}{75}\right) + x^3\left(-\frac{50}{75}\right) \\ &= x^2\left(\frac{1800-150x-50x}{75}\right) \\ &= x^2\left(\frac{1800-200x}{75}\right) \end{aligned}$$

El diagrama de signo de este polinomio es:

$sg\, f'(x)$	$\nexists$	0	+	0	−	0	$\nexists$	
		0		9		12		

Por lo tanto, $U(x,y)$ alcanza su máximo absoluto en $x = 9$. Con ello, la solución para y es $y = 2$, con lo que la solución al problema original es el par $(9,2)$. Para maximizar su utilidad este individuo debe comparar 9 entradas para ver a Suecia y 2 entradas para ver a Brasil.

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4

Llamaremos n, c y s a las cantidades de consejos del norte, centro y sur respectivamente. En ese caso, tenemos que

$$\left\{\begin{array}{rl} n+6s & =3c \\ 2c & =60+2s \\ 2n+2c+4s & =240 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rl} n-3c+6s & =0 \\ 2c-2s & =60 \\ 2n+2c+4s & =240 \end{array}\right. \overset{E_3-2E_1}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} n-3c+6s & =0 \\ 2c-2s & =60 \\ 8c-8s & =240 \end{array}\right.$$

$$\overset{E_3-4E_1}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} n-3c+6s & =0 \\ 2c-2s & =60 \\ 0 & =0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rl} n-3c+6s & =0 \\ 2c-2s & =60 \end{array}\right.$$

Concluimos que el sistema es compatible indeterminado y su solución analítica es

$$S=\{(n,c,s)\in\mathbb{R}^3/n=90-3s, c=30+s, s\in\mathbb{R}\}$$

Ejercicio 5

Una empresa importadora de calzados realiza en enero de 2023 una importación de 1500 unidades. Debido a el gran interés que percibe de parte de los consumidores, decide realizar importaciones mensuales (a comienzos de cada mes) e incrementar la cantidad importada un 4 % mensual. Las proyecciones de mercado indican que a partir de enero del 2025 la empresa importadora deberá incrementar la cantidad importada un 8 % mensual.

1. Dar una expresión para la sucesión que describe la evolución de la cantidad de calzados importados mensualmente.

$$a_n=\left\{\begin{array}{ll} 1500(1{,}04)^n & , \quad 0\le n\le 23 \\ 3845(1{,}08)^{n-24} & , \quad 24\le n \end{array}\right.$$

   donde $3845\approx 1500(1{,}04)^{24}$

2. Estimar la cantidad total de importaciones realizadas desde comienzos de 2023 hasta finales de 2024.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{23} a_n &= \sum_{n=0}^{23} 1500(1{,}04)^n \\ &= 1500\left(\frac{1{,}04^{24}-1}{1{,}04-1}\right)\approx 58624\end{aligned}$$

3. ¿En que momento el total de importaciones (consideradas desde enero 2023) alcanzó las 50.000 unidades?
   A partir del calculo anterior, sabemos que el momento en que se alcanzan las 50.000 unidades durante los primeros dos años, por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} a_n &= 50000 \\ 1500\left(\frac{1{,}04^{k+1}-1}{1{,}04-1}\right) &= 50000 \\ 1{,}04^{k+1} &= \frac{7}{3} \\ k &\approx 20{,}6\end{aligned}$$

4. Estimar la cantidad total de importaciones realizadas desde comienzos de 2024 hasta finales de 2026.

$$\sum_{n=12}^{47} a_n = \sum_{n=12}^{23} a_n + \sum_{n=24}^{47} a_n$$

El primer termino lo calculamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sum_{n=12}^{23} a_n &= \sum_{n=0}^{23} a_n - \sum_{n=0}^{11} a_n \\ &\approx 58624 - 1500\left(\frac{1{,}04^{12}-1}{1{,}04-1}\right) \\ &\approx 58624 - 22539 = 36085\end{aligned}$$

El segundo termino lo calculamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sum_{n=24}^{47} a_n &= \sum_{n=24}^{47} 3845(1{,}08)^{n-24} = \sum_{n=0}^{23} 3845(1{,}08)^{n} \\ &= 3845\left(\frac{1{,}08^{24}-1}{1{,}08-1}\right) \approx 256710\end{aligned}$$

El total de ventas es 292795.