Nombre:____

C.I.: __________________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.
La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1

Clasificar y resolver el siguiente sistema 3×3 y discutir su solución según los valores del parámetro k

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -2x+y+z &= 0 \\ kx+2y+z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -2x+y+z &= 0 \\ kx+2y+z &= 1 \end{cases} \xrightarrow{E_2-E_1} \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -3x &= -3 \\ kx+2y+z &= 1 \end{cases}$$

de la segunda ecuación obtenemos $x = 1$ y por lo tanto el sistema queda

$$\begin{cases} 1+y+z &= 3 \\ k+2y+z &= 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z &= 2 \\ 2y+z &= 1-k \end{cases}$$

despejando z de la última ecuación y sustituyendo en la primera obtenemos $y = -k-1$ y $z = k+3$. Por lo tanto, concluimos que, para cualquier valor de k, el sistema es compatible determinado y su solución es

$$S = \{(1, -k-1, k+3)\}$$

Ejercicio 2

Una empresa realiza un estudio de viabilidad previo a iniciar operaciones. A partir de dicho estudio se construye un modelo predictivo de las utilidades que la empresa va a tener a lo largo del tiempo

$$U : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} / U(t) = (t^2 + 2t)e^{6-t}$$

donde t representa meses a partir de comienzos de enero del 2024 y $U(t)$ representa las utilidades (en miles de dólares) en tiempo t.

1. Determinar el máximo absoluto de utilidad que predice el modelo e indicar donde se alcanza.

$$\begin{aligned} U'(t) &= (2t+2)e^{6-t} + (t^2+2t)(-1)e^{6-t} \\ &= (-t^2+2)e^{6-t} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lccccc}
 & - & 0 & + & 0 & - \\
sg\,(-t^2+2) & \longrightarrow & | & \longrightarrow & | & \longrightarrow \\
 & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lc}
 & + \\
sg\; e^{6-t} & \longrightarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \nexists & 0 & + & 0 & - \\
sg\; U'(t) & \longrightarrow & | & \longrightarrow & | & \longrightarrow \\
 & & 0 & & \sqrt{2} &
\end{array}
$$

A partir del diagrama de signo anterior concluimos que el máximo absoluto de U se alcanza en $t = \sqrt{2} \approx 1{,}4$. Aproximadamente a mitad de febrero de 2024.

2. Probar que lo **peor** que le puede pasar a la empresa es equiparar perdidas y ganancias. *(Sugerencia: puede ser útil recordar que $ae^{-x} = \frac{a}{e^x}$)*
Si lo peor que le puede pasar es equiparar pérdidas y ganancias, entonces el mínimo absoluto de U tiene que ser 0. Buscaremos probar esto último. Para ello, basándonos en el diagrama de signo calculado en la parte anterior analizamos $U(0) = 0$ y calculamos $\lim\limits_{t\to+\infty} U(t)$.
Como

$$U(t) = \frac{(t^2+2t)e^6}{e^t}$$

$$\lim_{t\to+\infty}(t^2+2t)e^6 = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$$

por ordenes, concluimos que $\lim\limits_{t\to+\infty} U(t) = 0$. Por lo tanto, el mínimo absoluto de U es 0 y se alcanza en $t = 0$.

Ejercicio 3

Un país registra su tasa de inmigración y a partir de esos datos el gobierno construye un modelo predictivo que describe la evolución de dicha tasa a lo largo del tiempo.

$$i : [1, +\infty) \to \mathbb{R} / i(t) = \frac{5}{t} - \frac{7}{t+1} + 0{,}1$$

donde $t = 1$ corresponde a comienzos del enero de 2024, $t = 2$ corresponde a comienzos de febrero de 2024 e $i(t)$ es la tasa de inmigración al país (en millones de inmigrantes/mes)

1. Calcule la variación neta de inmigrantes en el país entre comienzos del 2024 hasta finales del 2025.
Queremos calcular

$$\int_1^{25} i(t)dt = H(24) - H(1) \approx 0{,}5398$$

donde

$$H(t) = 5ln(t) - 7ln(t+1) + 0{,}1t$$

Por lo tanto, durante los años 2024 y 2025 el número de inmigrantes en el país creció en 540.000 aproximadamente.

2. ¿En algún momento la cantidad total de inmigrantes del país disminuye?
   Analizamos el diagrama de signo de la función i

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{5(t+1) - 7t + 0{,}1t(t+1)}{t(t+1)} \\ &= \frac{0{,}1t^2 - 1{,}9t + 5}{t(t+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & \nexists & & + & 0 & - & 0 & + & \\ sg\ i(x) & \vert & & & \vert & & \vert & & \longrightarrow \\ & 1 & & & 3{,}2 & & 15{,}8 & & \end{array}$$

   La cantidad de inmigrantes en el país decrece desde principios de marzo del 2024 hasta finales de marzo de 2025.

3. Sabiendo que a comienzos del 2024 la cantidad total de inmigrantes en el país es de 1 millón, construya la expresión de la función que describe la cantidad de inmigrantes en el país a lo largo del tiempo.
   Sabemos que la función que describe la cantidad de inmigrantes cumple

$$I : [1, +\infty) \to \mathbb{R} / I(t) = 5ln(t) - 7ln(t+1) + 0{,}1t + k$$

   con $I(1) = 1$, de lo cual deducimos que $k = 0{,}9 + 7ln(2) \approx 5{,}752$

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4

Consideremos la siguiente de producción de una fabrica de birodados que produce bicicletas y monopatines

$$g : D \to \mathbb{R} / g(x, y) = \frac{-y^2 x}{2} + y^3 + ax^2 + b$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$, x representa la cantidad de bicicletas producidas, y representa la cantidad de monopatines producidos y $g(x, y)$ representa el costo de producción (en unidades monetarias)

1. Sabiendo que $(36, 12)$ es un punto estacionarios de g, determinar posibles valores de los parámetros a y b.

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= \frac{-y^2}{2} + 2ax \\ g_y(x, y) &= -yx + 3y^2 \end{aligned}$$

   Como $(36, 12)$ es punto estacionario, $g_x(x, y) = 0$ y deducimos que $a = 1$. Al calcular las derivadas parciales de g, observamos que el parámetro b desaparece, por lo tanto b puede tomar cualquier valor.

2. Identificar todos los puntos estacionarios de g y clasificar aquellos que sea posible. Es necesario resolver el sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) &= \frac{-y^2}{2} + 2x = 0 \\ g_y(x, y) &= -yx + 3y^2 = y(3y - x) = 0 \end{cases}$$

   De la segunda ecuación obtenemos dos casos:

- caso $y = 0$: sustituyendo en la primer ecuación tenemos $x = 0$
- caso $3y - x = 0$: sustituyendo en la primer ecuación tenemos $y(6 - \frac{y}{2}) = 0$, lo cual nos da los valores $y = 0$ e $y = 12$.

En resumen, los puntos estacionarios de g son $(0,0)$ y $(36,12)$. La matriz hessiana de g es

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -y \\ -y & -x+6y \end{pmatrix}$$

Como $det(H_g(36,12)) = -72 < 2$ concluimos que $(36,12)$ es un punto silla. Por otro lado, como $det(H_g(0,0)) = 0$ concluimos que no es posible clasificar el punto $(0,0)$ a través del análisis visto durante el curso.

3. Calcular los valores $g_x(20,10)$, $g_y(20,10)$ e interpretarlos en el contexto del problema.

   Podemos interpretar el valor $g_y(20,10) = 100$ de la siguiente forma: si producción de la fábrica pasa de 20 bicicletas y 10 monopatines a 20 bicicletas y 11 monopatines, entonces el costo de producción aumenta en -aproximadamente- 100 unidades monetarias.

   Podemos interpretar el valor $g_x(20,10) = -10$ de la siguiente forma: si producción de la fábrica pasa de 20 bicicletas y 10 monopatines a 21 bicicletas y 10 monopatines, entonces el costo de producción se reduce en -aproximadamente- 10 unidades monetarias.

Ejercicio 5

Cierto país lleva registro mensual de la cantidad de personas en situación de vulnerabilidad económica. El registro en febrero de 2023 da cuenta de 1.010.000 en dicha situación mientras que en abril el registro alcanza las 1.030.301 personas.

1. Sabiendo que el crecimiento porcentual mensual de la cantidad de personas en situación de vulnerabilidad económica es constante, determinar una expresión para la sucesión que describe la evolución de dicho registro a partir de enero de 2023.
   Buscamos una sucesión de la forma $a_n = \alpha . r^n$ donde

$$a_1 = \alpha r^1 = 1.010.000$$
$$a_3 = \alpha r^3 = 1.030.301$$

   de donde deducimos

$$r^2 = \frac{1.030.301}{1.010.000} = 1{,}0201$$

   y obtenemos $r = 1{,}01$. Por lo tanto

$$\alpha 1{,}01 = 1.010.000$$
$$\alpha = 1.000.000$$

2. Determinar en que momento la cantidad de personas en el registro alcanzara los 1.300.000.

$$1.000.000(1{,}01)^n = 1.300.000$$
$$n = \log_{1{,}01} 1{,}3 \approx 26{,}4$$

3. El gobierno implementa un plan de apoyo económico de $20 unidades monetarias por persona por mes, para toda persona en situación de vulnerabilidad económica. ¿Cual es el gasto del gobierno en el programa durante el periodo que va desde enero 2024 hasta diciembre 2025?
   Queremos calcular

$$
\begin{aligned}
20 \sum_{n=12}^{35} a_n &= 20 \left[\sum_{n=0}^{35} a_n - \sum_{n=0}^{11} a_n \right] \\
&= 20(1.000.000) \left[\frac{1{,}01^{36} - 1}{1{,}01 - 1} - \frac{1{,}01^{12} - 1}{1{,}01 - 1} \right] \\
&\approx 607.887.507 \text{ unidades monetarias}
\end{aligned}
$$