

Nombre: _____

C.I.: _____ Libre Reglamentado

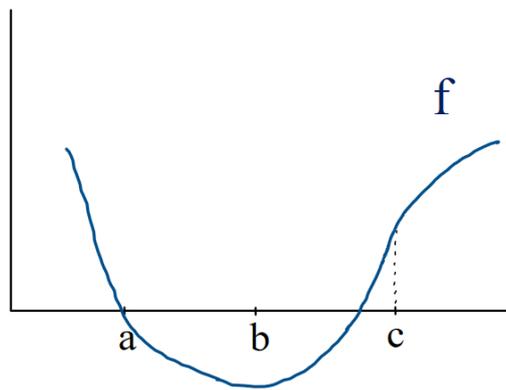
Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.

La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

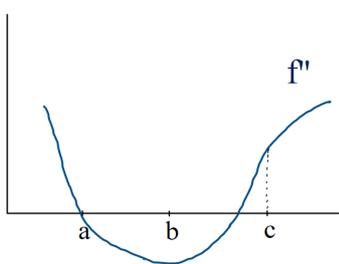
PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1

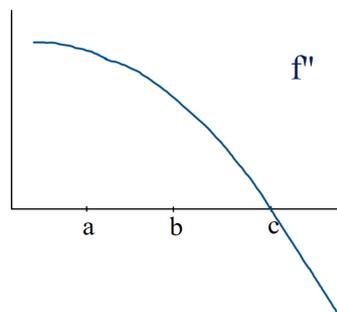
Consideremos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con el siguiente bosquejo gráfico:



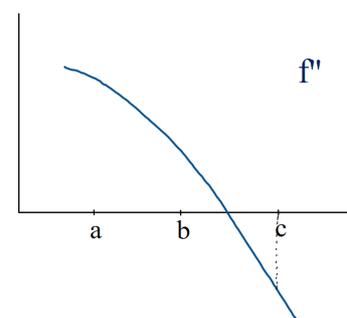
- Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f'' . Señalar los motivos para descartar las otras opciones.



(a)



(b)



(c)

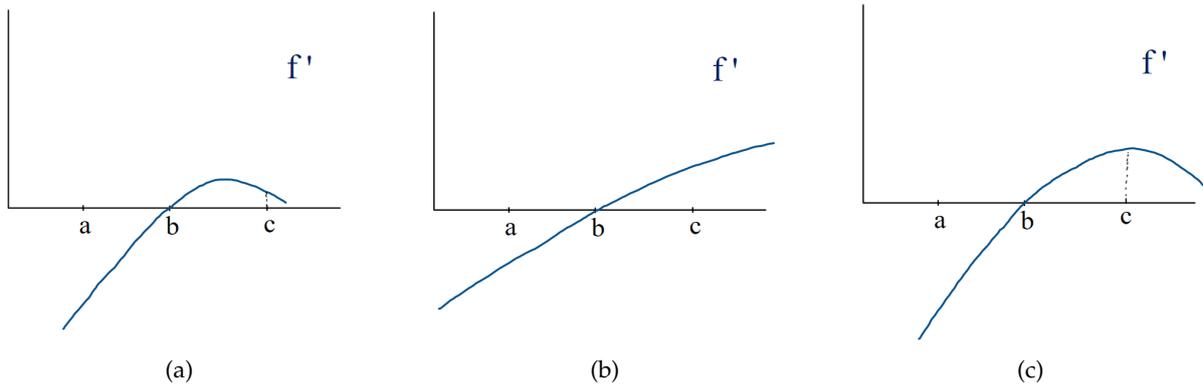
La opción a) la descartamos ya que f'' toma valores negativos en el intervalo (a, c) lo cual implica que f debería tener concavidad negativa en dicho intervalo, cosa que no sucede.

La opción c) la descartamos ya que f'' toma valores negativos en un intervalo (d, c) con $b < d < c$ lo cual implica que f debería tener concavidad negativa en dicho intervalo. Eso no sucede ya que vemos que f tiene concavidad positiva en $(-\infty, c)$ y concavidad negativa en $(c, +\infty)$.

La opción correcta es la b).

2. Indicar cual de los siguientes gráficos se ajusta mejor al gráfico de f' . Señalar los motivos para descartar las otras opciones.

(Sugerencia: es necesario tener en cuenta tanto el gráfico de f dado como el gráfico de f'' elegido anteriormente)



Tenemos que $f''(c) = 0$, por lo tanto la tangente al gráfico de f' en el punto c debe ser horizontal. Eso descarta las opciones a) y b). La correcta es la c).

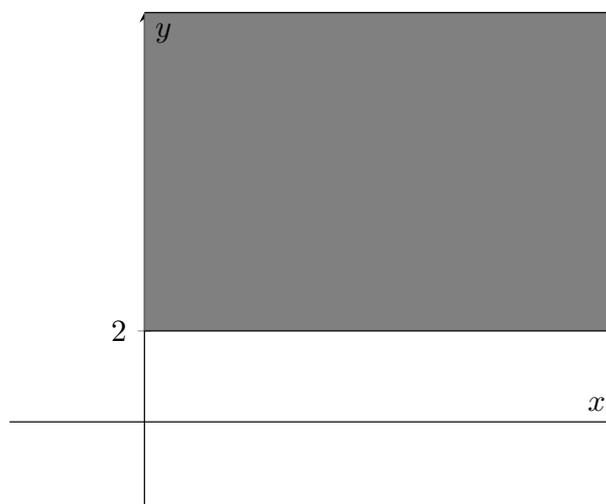
Ejercicio 2

Una fabrica produce dos tipos de articulo (A y B). Por restricciones contractuales con sus compradores, debe producir un mínimo de 2 artículos mensuales de tipo B. Disponemos de la siguiente función de utilidad mensual asociada a la producción de ambos tipos de producto

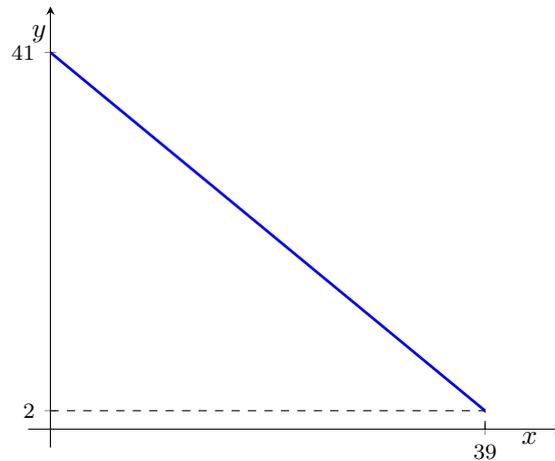
$$U : D \rightarrow \mathbb{R} / U(x, y) = 3x^3 + (y + 2)^2 - x$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 2\}$ donde x representa la cantidad de productos del tipo A, y representa la cantidad de productos de tipo B.

1. Representar gráficamente el conjunto D .



2. Supongamos que la fabrica en cuestión tiene un tope de capacidad de 41 artículos mensuales en total. Plantear lo anterior como una restricción analítica y representar gráficamente el conjunto de posibilidades de producción correspondiente a dicha restricción.



3. Asumiendo la restricción planteada en 2), ¿que combinación de artículos de tipo A y B deben producirse para maximizar la utilidad?

Necesitamos maximizar $U(x, y) = 3x^3 + (y + 2)^2 - x$ sujeto a $x + y = 41$. A partir de esta restricción, obtenemos $y = 41 - x$ y sustituimos en U

$$\begin{aligned} U(x, 41 - x) &= 3x^3 + (43 - x)^2 - x \\ &= 3x^3 + x^2 - 87x + 1849 \end{aligned}$$

Si llamamos $h(x) = 3x^3 + x^2 - 87x + 1849$ entonces el problema original podemos reducirlo a determinar el máximo absoluto de h en $[0, 39]$.

Para esto, calculamos h'

$$h'(x) = 9x^2 + 2x - 87 \implies x = -\frac{29}{9} \text{ ó } x = 3$$

El diagrama de signo de h' es

$$\begin{array}{ccccccc} \text{sg } h'(x) & \# & & - & & 0 & & + & & \# \\ & | & & | & & | & & | & & | \\ & 2 & & & & 3 & & & & 39 \end{array}$$

entonces, resta calcular $h(0) = 1849$ y $h(39) = 177.934$. Esto quiere decir que el par $(x, y) = (39, 2)$ es solución del problema original.

Ejercicio 3

1. El Ministerio de Turismo está analizando la cantidad de turistas que han descendido de los cruceros en los puertos de Montevideo y Punta del Este. En el año 2022 la cantidad la cantidad de personas que descendió en Montevideo y Punta del Este fue la misma, siendo de 200 mil personas. En tanto, en el año 2023, la cantidad de personas que descendió en Montevideo alcanzó las 140 mil personas. Se desconoce la cantidad de personas que descendieron en Punta del Este en este último año.

- a) Construya una matriz A de 2×2 , a partir de los datos anteriores, que contenga los datos de la cantidad de turistas que descendieron de los cruceros (en miles de personas), por puerto de descenso, según año. Ordene los datos de tal manera que las columnas representen los puertos de descenso (Montevideo y Punta del Este) y las filas los años analizados (2022 y 2023).

$$A = \begin{pmatrix} 200 & 200 \\ 140 & b \end{pmatrix}$$

- b) Determine el número de personas que descendieron en Punta del Este en 2023 sabiendo que $\det(A) = -8000$

$$\det(A) = 200 \cdot b - 200 \cdot 140 = -8000$$

$$b = 100$$

- c) Encuentre, si existe, la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{1}{200 \cdot 100 - 200 \cdot 140} \begin{pmatrix} 100 & -200 \\ -140 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0125 & 0,025 \\ 0,0175 & -0,025 \end{pmatrix}$$

- d) Sabemos que el gasto total realizado por los turistas en 2022 fue de 80.000 (en miles de dólares), mientras que fue de 50.000 (miles de dólares) durante el 2023.

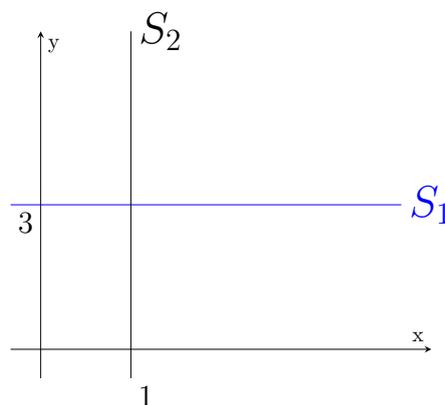
Resuelva la siguiente ecuación matricial: $AX = B$, donde B es: $B = \begin{pmatrix} 80.000 \\ 50.000 \end{pmatrix}$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -0,0125 & 0,025 \\ 0,0175 & -0,025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80.000 \\ 50.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \end{pmatrix}$$

- e) ¿Cómo podría interpretarse el significado de la matriz X ?

Podría interpretarse como el gasto promedio por turista para Montevideo (250 dólares) y Punta del Este (150 dólares), bajo el supuesto que dicho gasto promedio se mantiene constante durante los años 2022 y 2023.

2. Considérese la siguiente representación gráfica de las soluciones de las ecuaciones de un sistema 2×2



Plantear un posible sistema 2×2 con igual solución que en la figura. De forma tal que la primera ecuación tenga como solución el conjunto S_1 y la segunda ecuación S_2 .

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4

Una empresa se instala en el país a comienzos del 2024 y dispone de un modelo predictivos sobre la evolución de sus utilidades. El modelo es el siguiente

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} / f(t) = 3e^{2-t/4} - 2$$

donde t corresponde a la cantidad de meses a partir del inicio de actividades de la empresa y $f(t)$ corresponde a la tasa de utilidades (en millones de dólares/mes) en el tiempo t .

1. ¿Cuál es el saldo neto de utilidades previstas por el modelo durante el primer año de funcionamiento?

Queremos calcular

$$\int_0^{12} f(t)dt = F(12) - F(0) \approx 60,25$$

donde $F(t) = -12e^{2-t/4} - 2t$. Por lo tanto, el saldo neto de utilidades durante el primer año es de aproximadamente 60.250.000 dólares.

2. ¿El modelo predice que la empresa tendrá pérdidas en algún momento? Justifique la respuesta.

Buscamos analizar $sg f(t)$

$$3e^{2-t/4} - 2 = 0$$

$$t = (2 - \ln(\frac{2}{3}))4$$

$$t \approx 9,62$$

Por otro lado, como f es continua y $f(0) \approx 20,2$ $f(12) \approx -0,9$ concluimos que el diagrama de signo es

$$sg f(x) \begin{array}{c} \# \quad + \quad 0 \quad - \\ \hline 0 \quad \quad 9,62 \end{array} \rightarrow$$

El modelo predice que la empresa tendrá pérdidas a partir de mitad del décimo mes aproximadamente.

3. Suponiendo que los fondos de la empresa dependen exclusivamente de las utilidades descritas en el modelo y sabiendo que al finalizar el tercer mes de funcionamiento la empresa cuenta con un fondo de 60 millones de dólares, construir la función que describe la cantidad de fondos de la empresa en tiempo t .

$$G(t) = 60 + \int_3^t f(s)ds \approx -12e^{2-t/4} - 2t + 107,89$$

Ejercicio 5

Las instituciones de registro civil de un país contabilizan en 50.000 la cantidad de inmigrantes en el mismo a comienzos del 2024. Se prevé un crecimiento de 15% anual en el número de inmigrantes en el país

1. Calcule en que momento habrá 330.000 inmigrantes.

Tenemos que $a_n = 50000(1,15)^n$ para $n \geq 0$ y queremos resolver

$$50000(1,15)^n = 330000$$

$$5(1,15)^n = 33$$

$$n = \log_{1,15}^{\frac{33}{5}} \approx 13,5$$

2. A través de un acuerdo interpartidario, el gobierno aprueba un programa de apoyo económico a los inmigrantes en el cual entrega un monto de \$ 200 unidades monetarias por año a cada inmigrante en el país. Suponiendo que dicho programa se mantiene independientemente de quien gane las elecciones, estimar en que momento el gobierno habrá destinado (desde 2024) un total de 500 millones de unidades monetarias a dicho programa.

$$200 \sum_{n=0}^k 50000(1,15)^n = 500.000.000$$

$$200(50000) \sum_{n=0}^k (1,15)^n = 500.000.000$$

$$\sum_{n=0}^k (1,15)^n = 50$$

$$\frac{(1,15^{k+1} - 1)}{1,15 - 1} = 50$$

$$k \approx 14,3$$